ACTA

MATHEMATICA

A1

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT — JOURNAL

HERAUSGEGEBEN — RÉDIGÉ

VON — PAR

G. MITTAG-LEFFLER

11

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1887—1888.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES FONCTIONS UNIFORMES LIÉES PAR UNE RELATION ALGÉBRIQUE.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

EMILE PICARD
À PARIS.

Le théorème que je me propose de démontrer peut être énoncé de la manière suivante.

Si entre deux fonctions analytiques uniformes d'une variable existe une relation algébrique de genre supérieur à l'unité, ces fonctions ne pourront avoir de point singulier essentiel isolé.

Je possède de cette proposition deux démonstrations essentiellement différentes. La première, qui s'appuie sur la théorie des fonctions fuchsiennes, ne sera à très peu près que la reproduction de celle que j'ai donnée, il y a quelques années, dans le Bulletin des sciences mathématiques 7_2 (1883), p. 107—116, pour une proposition moins générale en apparence, mais identique au fond à celle que je viens d'énoncer. Quant à la seconde, j'en ai seulement autrefois indiqué le principe dans un cas particulier, et c'est à une ingénieuse remarque de M. HURWITZ que je dois d'avoir pu la pousser jusqu'au bout.

Première démonstration.

1. Mon point de départ est dans la proposition suivante qui résulte des recherches de M. POINCARÉ sur les fonctions fuchsiennes (*Mémoire*

sur les groupes des équations linéaires, Acta Mathematica tome 4). x et y étant liés par la relation algébrique

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

de genre au moins égal à *deux,* on peut trouver une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x, y) . z$$

(où φ est rationnelle en x et y) n'ayant d'autres points singuliers que les points analytiques ($x = a$, $y = b$), points singuliers de l'équation (1), et jouissant des propriétés suivantes. Si l'on prend deux intégrales convenables ω_1 et ω_2, l'équation

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u$$

donne pour x une fonction fuchsienne de u, fonction qui n'est définie que pour les valeurs de u, dans lesquelles le coefficient de i est positif. *De plus,* dans le voisinage d'un point analytique ($x = a$, $y = b$) (b faisant partie d'un système circulaire de p racines), le quotient $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ sera fonction uniforme de $(x - a)^{\frac{1}{p}}$, et *enfin,* aucune des substitutions du groupe de l'équation linéaire n'est parabolique.

La fonction u de x, que nous venons de définir, a pour chaque valeur de x une infinité de déterminations; quel que soit x, toutes ces déterminations ont des valeurs finies, et, dans ces expressions mises sous la forme ordinaire des quantités complexes, le coefficient de i est toujours positif et différent de zéro. u désignant l'une d'entre elles, toutes les autres sont données par la formule

$$\frac{Au + B}{Cu + D}$$

où A, B, C et D sont réels, avec $AD - BC = 1$.

La substitution (A, B, C, D) est une substitution du groupe fuchsien défini plus haut. Ce groupe, comme je l'ai dit, ne renferme pas de substitutions paraboliques.

2. Ces résultats étant admis, soient

$$x = P(z), \qquad y = Q(z)$$

deux fonctions analytiques, uniformes dans le voisinage d'un point a; que nous allons supposer être, pour ces fonctions, un point singulier essentiel *isolé*. Je suppose qu'entre x et y existe une relation algébrique

$$f(x, y) = 0$$

de genre égal ou supérieur à deux.

J'envisage la fonction u de x, définie plus haut; je remplace dans cette fonction x par $P(z)$; u devient une fonction de z, dont nous allons faire l'étude, dans le voisinage de a, c'est-à-dire à l'intérieur d'un certain cercle C décrit du point a comme centre, cercle à l'intérieur duquel les fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ sont uniformes et ont le seul point singulier essentiel a.

Dans le voisinage de toute valeur de z, à laquelle ne correspond pas un système de valeurs de x et y qui donnent un point singulier de la relation algébrique, la fonction u est évidemment uniforme. Soit maintenant $z = z_1$ une valeur de z pour laquelle on ait $x = a'$, $y = b'$, cette dernière faisant partie d'un système circulaire de p racines; l'équation $P(z) = a'$ admettra la racine $z = z_1$ à un degré de multiplicité multiple de p, puisque la valeur de y tirée de l'équation (1) doit être une fonction uniforme de z. Or $u(x)$ étant dans le voisinage de $x = a'$ fonction uniforme de $(x - a')^{\frac{1}{p}}$, sera par suite une fonction uniforme de z dans le voisinage de z_1. Nous concluons de là que u est une fonction uniforme de z, dans tout contour simple, situé à l'intérieur de C et ne comprenant pas le point a.

Nous allons maintenant rechercher la forme de u dans le voisinage du point a. Soit pour un point du cercle C une détermination u de la fonction $u(z)$; quand z fait un tour complet autour du point a dans le sens positif, $x = P(z)$ décrit dans son plan une courbe également fermée, et par conséquent la nouvelle détermination de u a la forme

$$\frac{Au + B}{Cu + D},$$

cette substitution étant une des substitutions du groupe dont il a été parlé précédemment, et deux cas vont être à distinguer, suivant que cette substitution est hyperbolique ou elliptique.

3. Supposons d'abord que la substitution (A, B, C, D) soit hyperbolique. On a alors $(A+D)^2 > 4$. On peut alors, comme il est bien connu, trouver cinq quantités réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et k, telles que $\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u}$ se reproduise multiplié par k après un tour complet de z autour du point a.

k est d'ailleurs une constante positive différente de l'unité; designons par μ son logarithme arithmétique. Le quotient

$$\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u} : (z-a)^{\frac{\mu}{2\pi i}}$$

reprend par suite la même valeur après un tour complet, et l'on peut écrire

$$\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u} = (z-a)^{\frac{\mu}{2\pi i}} \varphi(z),$$

la fonction $\varphi(z)$ étant uniforme dans le cercle C; $\varphi(z)$ n'aura dans ce domaine d'autre point singulier que le point a, car le dénominateur $\gamma+\delta u$ ne peut jamais devenir nul, puisque γ et δ sont réels. De plus $\varphi(z)$ ne s'annulera jamais, puisque $\alpha+\beta u$ ne peut s'annuler; par suite, le quotient $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ est uniforme et continu dans C à l'exception de a. On peut alors écrire

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \ldots + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \frac{A_1}{z-a} + A + B(z-a) + \ldots,$$

série double procédant suivant les puissances croissantes de $z-a$. En intégrant, on voit de suite que A_1 doit être un entier m positif ou négatif, puisque $\varphi(z)$ est uniforme; on a donc

$$\varphi(z) = (z-a)^m e^{f(z)},$$

$f(z)$ étant uniforme dans C et continue à l'exception du point a. En résumé, nous obtenons

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} = (z - a)^{\frac{\mu}{2\pi i} + m} e^{f(z)}.$$

Or le coefficient de i dans le premier membre a un signe invariable, puisque dans u le coefficient de i est toujours positif; nous allons montrer que le coefficient de i dans le second membre ne peut avoir un signe constant; écrivons à cet effet

$$(z - a)^{\frac{\mu}{2\pi i} + m} e^{f(z)} = e^{\left(\frac{\mu}{2\pi i} + m\right)\log(z-a) + f(z)}.$$

Si dans cette expression le coefficient de i a toujours le même signe, le signe $+$ pour fixer les idées, le coefficient de i dans

$$\left(\frac{\mu}{2\pi i} + m\right) \log (z - a) + f(z)$$

devra rester compris entre $2k\pi$ et $(2k + 1)\pi$, c'est-à-dire entre deux limites fixes.

Posons

$$\left(\frac{\mu}{2\pi i} + m\right) \log (z - a) + f(z) = U + iV.$$

Il est tout d'abord évident que, si m n'est pas nul, V ne peut rester entre deux limites fixes, car une rotation autour du point a augmente V de $2m\pi$.

Supposons donc $m = 0$; l'égalité précédente pourra s'écrire

$$\log (z - a) + \frac{2\pi i}{\mu} f(z) = -\frac{2\pi V}{\mu} + \frac{2\pi i U}{\mu},$$

ou

$$(z - a) e^{\frac{2\pi i}{\mu} f(z)} = e^{-\frac{2\pi V}{\mu}} e^{\frac{2\pi i U}{\mu}}.$$

Mais le module du second membre reste compris entre deux limites déterminées, tandis que le premier peut devenir aussi petit que l'on veut, que $f(z)$ soit continue ou non au point $z = a$.

Il résulte de la contradiction que nous venons de rencontrer que la substitution (A, B, C, D) ne peut être hyperbolique.

4. Supposons maintenant que la substitution soit elliptique. Nous avons dans ce cas

$$(A + D)^2 < 4$$

On pourra encore trouver quatre quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et k telles que $\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u}$ se reproduise multiplé par k après un tour de z autour de a; mais ici ces quantités ne sont plus réelles. On a pour déterminer le rapport de γ à δ l'équation du second degré

$$B\delta^2 + (D - A)\delta\gamma - C\gamma^2 = 0,$$

et pareillement

$$B\beta^2 + (D - A)\beta\alpha - C\alpha^2 = 0;$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$ sont donc racines de l'équation du second degré

$$B + (D - A)x - Cx^2 = 0,$$

dont les racines sont imaginaires, puisque

$$(A + D)^2 < 4 \quad \text{et} \quad AD - BC = 1.$$

Nous prendrons pour $\frac{\alpha}{\beta}$ la racine dans laquelle le coefficient de i est négatif, et par suite dans $\frac{\gamma}{\delta}$ le coefficient de i sera positif.

Quant au multiplicateur k, il est nécessairement une racine de l'unité, sans quoi le groupe dont fait partie la substitution (A, B, C, D) ne serait pas un groupe discontinu; nous poserons donc $k = e^{\frac{2m\pi i}{n}}$, m et n étant positifs et premiers entre eux.

Ceci posé, considérons le quotient

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} : (z - a)^{\frac{m}{n}};$$

ce quotient sera une fonction uniforme dans le domaine C.

Ecrivons donc

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} = (z - a)^{\frac{m}{n}} \varphi(z).$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, le coefficient de i dans $-\frac{\gamma}{\delta}$ est négatif, tandis qu'il est positif dans $-\frac{\alpha}{\beta}$. Le dénominateur $\gamma + \delta u$ ne peut donc s'annuler, puisque dans u le coefficient de i est

toujours positif; il y a plus, le module du premier membre reste toujours inférieur à une limite qu'il serait facile d'assigner. On en conclut que le point $z = a$ ne peut être un point singulier essentiel pour $\varphi(z)$. Ce point est donc un pôle ou un point ordinaire pour la fonction φ; dans ces conditions, l'expression

$$(z - a)^{\frac{m}{n}} \varphi(z),$$

n étant plus grand que 1 et m étant premier à n, ne peut que tendre vers zéro ou augmenter indéfiniment quand z tend vers a; la seconde supposition étant, d'après ce qui précède, inadmissible, cette expression a la valeur zéro pour $z = a$. Nous arrivons donc à cette conclusion:

De quelque manière que z tende vers le point a, la fonction u tend vers $-\frac{\alpha}{\beta}$. Or, pour $u = -\frac{\alpha}{\beta}$, la fonction fuchsienne x de u, définie par la relation (n° 1)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u,$$

possède une valeur parfaitement déterminée; donc, de quelque manière que z tende vers a, la fonction $x = P(z)$ tend vers une valeur déterminée, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que le point a est un point singulier essentiel de $P(z)$.

La substitution (A, B, C, D) ne peut donc être elliptique; or, comme le groupe ne renferme que des substitutions elliptiques et hyperboliques, il ne nous reste plus qu'à supposer que la fonction u de z est uniforme dans le voisinage de a.

5. L'examen de ce cas sera bien facile. On aurait alors

$$u = A(z) + B(z),$$

où

$$A(z) = A_0 + A_1(z - a) + \dots,$$

$$B(z) = \frac{B_1}{z - a} + \frac{B_2}{(z - a)^2} + \dots.$$

$B(z)$ doit être nulle, sinon le coefficient de i dans la fonction u aurait un signe variable. On a donc

$$u = A_0 + A_1(z - a) + A_2(z - a)^2 + \dots.$$

Dans la constante A_0, le coefficient de i doit être différent de zéro et positif; il ne peut, en effet, être nul, car alors le coefficient de i dans u serait le même que dans

$$A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots,$$

et ce dernier dans le voisinage de $z=a$ n'a évidemment pas un signe constant.

On voit donc que, quand z tend vers a, u tend vers une valeur A_0 dans laquelle le coefficient de i est différent de zéro et positif. En raisonnant comme plus haut, nous en concluons que, pour $z=a$, la fonction $P(z)$ a une valeur parfaitement déterminée.

Il est maintenant bien aisé de conclure. Nous sommes en effet, par ce qui précède, conduit à cette conclusion que le point *a ne peut être* un point singulier *essentiel* de $P(z)$ et $Q(z)$. C'est donc bien, comme on voit, le théorème énoncé au début qui se trouve ainsi démontré d'une manière complétement rigoureuse. On peut encore dire, ce qui reviendra au même, que:

Si entre deux fonctions analytiques uniformes ayant un point singulier essentiel isolé, existe une relation algébrique, le genre de cette relation ne peut dépasser un.

Seconde démonstration.

6. Nous allons maintenant donner une seconde démonstration du même théorème, sans rien emprunter à la théorie des fonctions fuchsiennes. A cet effet, nous supposerons d'abord que la relation $f(x, y)=0$ soit hyperelliptique; nous pourrons alors nous placer dans l'hypothèse où cette relation a précisément la forme

$$y^2=(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n);$$

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont n constantes différentes et n est supérieur à quatre.

Nous supposons, comme plus haut, que l'on puisse poser

$$x=P(z), \qquad y=Q(z)$$

P et Q étant des fonctions analytiques, uniformes dans le voisinage d'un point a, qui sera pour ces fonctions un point singulier essentiel isolé.

Il est clair que les équations

$$P(z) = b_1, \qquad P(z) = b_2, \quad \ldots, \quad P(z) = b_n,$$

n'auront dans le cercle C que des racines d'un degré pair de multiplicité.

Ceci posé, formons le quotient

$$\frac{\frac{dP}{dz}}{\sqrt{(P - b_1)(P - b_2)(P - b_3)(P - b_4)}}$$

ce sera une fonction $R(z)$, uniforme dans le cercle C, et continue sauf au point a qui pourra être pour elle un point singulier essentiel. Nous pouvons donc écrire

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\sqrt{(P - b_1)\ldots(P - b_4)}} = \int_{z_0}^{z} R(z)dz = S(z) + A\log(z - a)$$

$S(z)$ désignant une fonction uniforme dans C, et continue sauf au point a, qui pourra être pour elle un point singulier essentiel; A représente une constante, et $2\pi i A$ est évidemment une somme de multiples de périodes de l'intégrale elliptique.

On conclut de là que $P(z)$ est une fonction doublement périodique φ de $S(z) + A\log(z - a)$, soit

$$P(z) = \varphi[S(z) + A\log(z - a)].$$

Je vais maintenant montrer que $P(z)$ ayant cette forme, l'équation

$$(1) \qquad P(z) = b$$

où b est différent de b_1, b_2, b_3, b_4 ne peut avoir dans C toutes ses racines d'un degré pair de multiplicité. Remarquons d'abord que la dérivée de $\varphi(u)$ considérée comme fonction de u ne s'annule que quand φ prend une des valeurs b_1, b_2, b_3 ou b_4; il en résulte que si $z = z_1$ est une racine d'un certain degré de multiplicité de l'équation (1), elle sera racine du même degré de multiplicité de l'équation:

$$S(z) + A\log(z - a) = S(z_1) + A\log(z_1 - a).$$

Si donc nous désignons par u_1 et u_2 les racines de l'équation $\varphi(u) = b$ dans un parallélogramme de périodes (ω, ω'), toutes les équations

$$(2)\qquad \begin{aligned} S(z) + A\log(z - a) &= u_1 + m\omega + m'\omega' \\ S(z) + A\log(z - a) &= u_2 + m\omega + m'\omega' \end{aligned}$$

où m et m' sont des entiers quelconques, devront avoir dans C toutes leurs racines d'un degré pair de multiplicité.

Considérons maintenant la fonction

$$\mathcal{G}(z) = (z - a)e^{\frac{S(z)}{A}}$$

c'est une fonction uniforme dans C, et continue sauf au point a qui est pour elle un point singulier essentiel. Les équations

$$\mathcal{G}(z) = e^{\frac{u_1 + m\omega + m'\omega'}{A}}, \qquad \mathcal{G}(z) = e^{\frac{u_2 + m\omega + m'\omega'}{A}}$$

n'auront dans C que des racines d'un degré pair de multiplicité, car ces équations sont identiques aux équations (2), puisque, comme nous l'avons dit, on a

$$2\pi i A = \alpha\omega + \beta\omega'$$

α et β étant des entiers. De plus, ces équations sont en nombre infini; nous avons donc une fonction $\mathcal{G}(z)$ uniforme dans C, continue sauf au point singulier essentiel a, *et telle que pour une infinité de valeurs de* h, l'équation

$$\mathcal{G}(z) = h$$

a dans C toutes ses racines de degré pair de multiplicité. C'est à la démonstration de l'impossibilité de ce fait que nous sommes ramené.

En considérant quatre des valeurs possibles de h, et en raisonnant sur $\mathcal{G}$, comme nous avons raisonné plus haut sur P, on montrera que φ_1 désignant une fonction doublement périodique, on a:

$$(3)\qquad \mathcal{G}(z) = \varphi_1[S_1(z) + A_1 \log(z - a)]$$

$S_1(z)$ étant une fonction de même nature que S et $\mathcal{G}$.

Or *l'identité* (3) *est inadmissible.* Car soit $\lambda + m\omega_1 + m'\omega_1'$ une série de pôles de la fonction φ_1, dont ω' et ω_1' désignent les périodes; les équations

$$(4)\qquad S_1(z) + A_1 \log(z - a) = \lambda + m\omega_1 + m'\omega_1'$$

auront certainement des racines dans le cercle C, car ces équations reviennent aux équations:

$$(z-a)e^{\frac{S_1(z)}{A_1}} = e^{\frac{\lambda + m\omega_1 + m'\omega'_1}{A_1}}$$

(en se rappelant la relation nécessaire $2\pi i A_1 = \alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega'_1$).

Le second membre a une infinité de valeurs quand on donne aux entiers m et m' toutes les valeurs entières possibles. Or si l'on considère la fonction:

$$(z-a)e^{\frac{S_1(z)}{A_1}}$$

elle prend une infinité de fois dans le voisinage de a toute valeur donnée, *deux* exceptions seulement étant possibles, d'après une proposition générale que j'ai donnée autrefois sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel.[1] Pour une racine de l'équation (4), $\mathcal{G}(z)$ sera infini, ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathcal{G}(z)$ doit être continue pour tous les points de C à l'exception seulement de a.

Le théorème est ainsi complétement démontré pour les courbes hyperelliptiques.

7. Il a été supposé, dans ce qui précède, que la relation entre x et y était hyperelliptique. Mes tentatives, pour passer au cas général, n'avaient pas été couronnées de succès, mais on peut cependant achever la démonstration, en restant dans le même ordre d'idées, grâce à une remarque fort intéressante que m'a communiquée M. A. Hurwitz dans une lettre déjà ancienne.

Soit $f(x, y) = 0$, la relation que l'on ne suppose pas hyperelliptique, et pour laquelle on a par conséquent $p > 2$. A l'équation précédente, le savant géomètre associe une relation

$$f_1(x, y_1) = 0 \qquad \text{de genre } p = 2$$

jouissant des propriétés suivantes: les points de ramification de la fonction algébrique y_1 de x sont tous compris parmi les points de ramification de la fonction algébrique y de x (on suppose, pour plus de simplicité, et comme il est permis, que tous les points de ramification de la

[1] *Mémoire sur les fonctions entières* (Annales de l'école normale supérieure de Paris, 1880).

fonction donnent seulement des cycles de deux racines), et dans le voisinage de tout point analytique (x, y) la fonction y_1 peut être considérée comme une fonction uniforme du point (x, y). L'équation $f_1(x, y_1)$ peut d'ailleurs être déterminée d'une infinité de manières, comme le montre la considération de la surface de Riemann correspondant à $f(x, y) = 0$.

Substituons maintenant dans cette fonction y_1 de x

$$x = P(z).$$

y_1 va devenir une fonction de z, uniforme et continue dans le voisinage de tout point du cercle C, autre que le point a; quand z fera un tour autour du point a, y_1 pourra ne pas retrouver la même valeur, mais comme y_1 n'a qu'un nombre limité de valeurs, on est assuré qu'après un certain nombre de tours, soit m, y_1 reprendra sa valeur initiale. Or posons

$$z - a = z'^m$$

x sera une fonction uniforme de z' dans le voisinage de $z' = 0$, et y_1 sera pareillement une fonction uniforme de cette même variable; nous avons donc deux fonctions x et y_1 de z', uniformes dans le voisinage de $z' = 0$ qui est pour elles un point singulier essentiel isolé, et liées par la relation

$$f_1(x, y_1) = 0$$

dont le genre est égal à deux. Cette conclusion est inadmissible d'après ce que nous avons dit d'une manière générale des relations hyperelliptiques. Le théorème est donc, cette fois, établi sans aucune restriction.

8. Des deux démonstrations précédentes, la seconde ne faisant pas appel à la théorie des fonctions fuchsiennes a évidemment un caractère plus élémentaire. Elle est cependant beaucoup plus artificielle, et il me paraît plus naturel, pour démontrer l'impossibilité en question, de s'adresser précisément aux fonctions uniformes réalisant cette expression des coordonnées d'une courbe algébrique à l'aide d'un paramètre. Les fonctions fuchsiennes se justifient en quelque sorte ainsi elles mêmes; je veux dire qu'on peut tenir pour certain, d'après le théorème qui fait l'objet de cet article, qu'il est impossible d'obtenir des fonctions uniformes plus simples que celles de M. Poincaré pour exprimer les coordonnées d'une courbe algébrique de genre quelconque.

Paris, le 11 Octobre 1887.

EINE VERALLGEMEINERUNG DER DEKADISCHEN SCHREIBWEISE
NEBST
FUNCTIONENTHEORETISCHER ANWENDUNG

VON

EMIL STRAUSS
in FRANKFURT a/M.

Bekanntlich lassen sich viele Sätze über ganze rationale Functionen auch auf ganze transcendente Functionen übertragen. Man könnte daher vermuthen, dass dies auch bei dem folgenden Satze der Fall ist:

»Wenn eine ganze rationale Function mit rationalen Coefficienten für *eine* Wurzel einer irreductibeln algebraischen Gleichung verschwindet, so verschwindet sie für *sämmtliche* Wurzeln derselben.»

Würde sich dieses Theorem auch auf ganze transcendente Functionen (d. h. Functionen, die durch beständig convergente Potenzreihen darstellbar sind,) ausdehnen lassen, so wäre damit ein einfacher Beweis für die Transcendenz von π erbracht. Dieser Satz ist indessen nicht richtig und es soll in den folgenden Zeilen eine ganze transcendente Function mit rationalen Coefficienten construirt werden, welche zwar für eine Wurzel, nicht aber zugleich für die anderen Wurzeln einer irreductibeln algebraischen Gleichung verschwindet. Es ist dies auf mannigfaltige Weise möglich, am bequemsten wohl mit Benutzung der im folgenden zu entwickelnden Darstellung einer beliebigen Grösse, einer Darstellung, die sich als Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise auffassen lässt.

I.

Es sei gegeben eine unendliche Reihe von Grössen

$$c_1\,,\; c_2\,,\; \ldots,\; c_\nu\,,\; \ldots$$

und zwar möge sein:

$$c_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \qquad c_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}, \qquad \ldots, \qquad c_\nu = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu}. \qquad \ldots,$$

wo die Grössen

$$\alpha_1\,,\; \alpha_2\,,\; \ldots$$

irgend welche ganze positive Zahlen ausser 0 und 1 bedeuten. Es lässt sich dann jede positive, rationale oder irrationale Grösse ω, die kleiner ist als 1, in der Form darstellen:

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \ldots,$$

wo $a_1\,,\; a_2\,,\; \ldots$ ganze Zahlen bedeuten, die den Ungleichungen genügen

$$a_1 < \alpha_1, \qquad a_2 < \alpha_2, \qquad \ldots.$$

Um diesen Satz zu beweisen genügt es die Methode anzugeben, wie die Grössen a gefunden werden, wenn die Grössen α gegeben sind.

Man setze

$$(1)\,.\,(2) \qquad \left|\begin{array}{l} [\alpha_1 \omega] = a_1 \\ [\alpha_2 \omega_1] = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ [\alpha_\nu \omega_{\nu-1}] = a_\nu \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \alpha_1 \omega - a_1 = \omega_1 \\ \alpha_2 \omega_1 - a_2 = \omega_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_\nu \omega_{\nu-1} - a_\nu = \omega_\nu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Dabei bedeutet $[x]$ die grösste ganze Zahl, welche nicht grösser ist als x; es sind demnach die Grössen $\omega_1\,,\; \omega_2\,,\; \ldots,\; \omega_\nu$, sämmtlich echte Brüche, es sei denn, dass eine derselben und mithin alle folgenden verschwinden. In dem letzteren Falle ist die Darstellung eine endliche, sonst ist sie unendlich. Die Grössen a genügen ferner der geforderten Bedingung

$$a_\nu < \alpha_\nu.$$

Die Darstellung liefert einen convergenten Ausdruck; denn es ist

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{a_\nu}{a_1 a_2 \ldots a_\nu} \leqq \frac{a_1 - 1}{a_1} + \frac{a_2 - 1}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{a_\nu - 1}{a_1 a_2 \ldots a_\nu}$$

also

$$\leqq 1 - \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_\nu}.$$

Endlich ist zu zeigen, dass

$$\lim \left[\omega - \frac{a_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1 a_2} - \ldots - \frac{a_\nu}{a_1 a_2 \ldots a_\nu} \right] = 0. \tag{3}$$

Multiplicirt man die ν ersten von den Gleichungen (2) der Reihe nach mit

$$\frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_1 a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_\nu}$$

und addirt dann, so erhält man

$$\omega - \frac{a_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1 a_2} - \ldots - \frac{a_\nu}{a_1 a_2 \ldots a_\nu} = \frac{\omega_\nu}{a_1 a_2 \ldots a_\nu} < \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_\nu},$$

woraus die Gleichung (3) sich ergiebt. Damit ist der in Rede stehende Satz erwiesen.

Es seien noch, wiewohl für unseren nächsten Zweck unnöthig, die folgenden Bemerkungen zu dieser Darstellungsweise einer Zahl, welche eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise repräsentirt, hinzugefügt.

1°. Wenn von irgend einem Index ab jede Grösse a den höchsten Werth hat, den sie haben kann, so lässt sich statt dieser Darstellung eine endliche geben.

Denn es sei

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_k c_k + (\alpha_{k+1} - 1) c_{k+1} + (\alpha_{k+2} - 1) c_{k+2} + \ldots;$$

nun ist aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_{k+\nu} - 1) c_{k+\nu} = c_k,$$

also

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_{k-1} c_{k-1} + (a_k + 1) c_k.$$

Dieses ist eine endliche Darstellung und wenn $a_k + 1 < \alpha_k$, so ist dieselbe auch von der gewünschten Form; wo nicht, so muss sein

$$a_k + 1 = \alpha_k,$$

also

$$(a_k + 1)c_k = c_{k-1}.$$

Mithin ist die noch kürzere Darstellung möglich

$$\omega = a_1 c_1 + \ldots + a_{k-2} c_{k-2} + (a_{k-1} + 1) c_{k-1}.$$

Dieses ist nun die gewünschte Form, wenn $a_{k-1} + 1 < \alpha_{k-1}$; wo nicht, so verfährt man wie eben. Schliesslich muss man auf diese Weise zum Ziele gelangen, da $\omega < 1$ vorausgesetzt wird und die Ungleichung stattfindet

$$(a_1 + 1)c_1 \leqq 1.$$

2°. Abgesehen von dem eben erwähnten Falle giebt es für eine Grösse ω *stets nur eine* Darstellung in der gewünschten Form, nämlich die oben gelehrte.

Denn wenn ω sich in zweierlei Weise darstellen liesse:

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_k c_k + a_{k+1} c_{k+1} + \ldots = s$$

und

$$a'_1 c_1 + a'_2 c_2 + \ldots + a'_k c_k + a'_{k+1} c_{k+1} + \ldots = s',$$

so seien die ersten beiden von einander verschiedenen Grössen a diejenigen mit dem Index $k + 1$, während die vorangehenden übereinstimmen mögen und zwar sei

$$a_{k+1} > a'_{k+1}$$

dann ist

$$s \geqq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_k c_k + (a'_{k+1} + 1) c_{k+1}. \tag{4}$$

Da wir voraussetzen, dass keine der Darstellungen zu den oben erwähnten gehöre, d. h. zu denen, bei welchen von irgend einem Index ab jedes a um 1 kleiner ist als das entsprechende α, so ist

$$a'_{k+2} c_{k+2} + a'_{k+3} c_{k+3} + \ldots < (\alpha_{k+2} - 1) c_{k+2} + (\alpha_{k+3} - 1) c_{k+3} + \ldots$$

$$\text{d. h.} < c_{k+1},$$

also

(5) $$s' < a'_1 c_1 + a'_2 c_2 + \ldots + a'_k c_k + (a'_{k+1} + 1) c_{k+1};$$

durch Vergleichung von (4) und (5) ergiebt sich

$$s > s'.$$

II.

Wir wollen jetzt mit Hilfe dieser Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise einer Zahl eine ganze transcendente Function bilden, die zwar für eine, nicht aber für jede Wurzel einer irreductibeln Gleichung verschwindet.

Als die irreductible Gleichung wählen wir die Gleichung:

$$kx^2 - 1 = 0,$$

wo k eine positive ganze, nicht quadratische Zahl bedeutet. Es sei ferner ω eine beliebige irrationale Grösse, welche nur die beiden Ungleichungen befriedigt:

$$\omega < 1 \quad \text{und} \quad \omega\sqrt{k} < 1.$$

Wir entwickeln dann die beiden Grössen ω und $\omega\sqrt{k}$ auf die in I gezeigte Weise; dabei soll sein

$$\alpha_1 = k, \qquad \alpha_2 = 2k, \qquad \ldots, \qquad \alpha_\nu = \nu k, \quad \ldots$$

also

$$c_1 = \frac{1}{\underline{|1}\, k}, \qquad c_2 = \frac{1}{\underline{|2}\, k^2}, \qquad \ldots, \qquad c_\nu = \frac{1}{\underline{|\nu}\, k^\nu}, \quad \ldots.$$

Die Entwicklungen seien:

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots$$

$$\omega\sqrt{k} = b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots,$$

wo

$$a_\nu < \nu k, \qquad b_\nu < \nu k.$$

Betrachten wir jetzt die beiden Potenzreihen

$$F(x) = \frac{a_1}{\underline{|1}} x^2 + \frac{a_2}{\underline{|2}} x^4 + \ldots + \frac{a_\nu}{\underline{|\nu}} x^{2\nu} + \ldots$$

$$G(x) = \frac{b_1}{\underline{|1}} x^2 + \frac{b_2}{\underline{|2}} x^4 + \ldots + \frac{b_\nu}{\underline{|\nu}} x^{2\nu} + \ldots,$$

so sind diese beständig convergent; denn setzt man statt der Grössen a und b ihre oberen Grenzen, so erhält man noch immer eine beständig convergente Reihe, nämlich die Reihe für $kx^2e^{x^2}$.

Nun ist

$$F\left(\pm\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = \omega, \qquad G\left(\pm\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = \omega\sqrt{k}.$$

Setzt man daher endlich

$$H(x) = F(x) - xG(x),$$

so ist

$$H\left(+\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 0, \qquad H\left(-\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 2\omega.$$

Demnach hat die ganze transcendente Function $H(x)$, welche rationale Coefficienten besitzt, die Eigenschaft zwar für eine Wurzel der obigen irreductibeln Gleichung zu verschwinden, nicht aber für die andere.

NOTE SUR LA FONCTION

$$\mathfrak{K}(w\,,\,x\,,\,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{(w+k)^s}$$

PAR

M. LERCH

À VINOHRADY.

Soit x une quantité dont la partie imaginaire est positive ou nulle, w une quantité réelle positive et moindre que l'unité et soit s une quantité dont la partie réelle est supérieure à l'unité. En représentant par $(w+k)^s$ la quantité $e^{s \lg (w+k)}$, où le logarithme est pris en sens arithmétique, considérons la somme

$$\mathfrak{K}(w\,,\,x\,,\,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{(w+k)^s} \tag{1}$$

convergente pour chaque valeur de s, si la partie imaginaire de x est supérieure à zéro, et ne convergente que pour les valeurs de s dont la partie réelle est positive, si x est une quantité réelle.

En se rappelant de la formule connue

$$\int_0^{\infty} e^{-(w+k)z} z^{s-1} dz = \frac{\Gamma(s)}{(w+k)^s}$$

nous aurons

$$\Gamma(s)\mathfrak{K}(w\,,\,x\,,\,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-wz-k(z-2\pi i x)} z^{s-1} dz.$$

Or on peut démontrer aisément l'égalité suivante

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-wz-k(z-2\pi i x)} z^{s-1}\, dz = \int_0^{\infty} z^{s-1}\, dz \sum_{k=0}^{\infty} e^{-wz-k(z-2\pi i x)}$$

et il s'ensuit la formule

$$\Gamma(s)\mathfrak{R}(w\,,\,x\,,\,s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-wz}\, z^{s-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i x - z}}. \tag{2}$$

En appliquant un raisonnement dû à Riemann[1] et employé dans une excellente communication de M. Hurwitz[2] nous ferons voir que la série (1) est une *fonction transcendante entière* de s et nous développerons une relation qui nous semble mériter d'être signalée.

Considérons l'intégrale

$$K(w\,,\,x\,,\,s) = \int_{(\infty\,,\,0,\,\infty)} \frac{e^{-wz}\, z^{s-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i x - z}} \tag{3}$$

prise le long d'un contour fermé $(\infty\alpha\beta\gamma\alpha\infty)$ enveloppant l'origine au moyen d'un cercle $\alpha\beta\gamma\alpha$ du rayon a ne contenant ni à son intérieur ni à sa périphérie aucun des points $2\pi i(x + \nu)$, $(\nu = 0\,,\,\pm 1\,,\,\pm 2\,,\,\pm 3\,,\ldots)$.

Nous avons représenté, dans cette intégrale, par z^{s-1} la quantité $e^{(s-1)\lg z}$, la partie imaginaire de $\lg z$ étant supposée ou nulle ou positive et non supérieure à 2π, de sorte que la fonction z^{s-1} est continue dans tout le plan des z à l'exception des points de la *coupure* $(0 \ldots \infty)$ où elle est discontinue de la manière qu'on peut exprimer par les formules

$$(z + 0\,.\,i)^{s-1} = z^{s-1} = e^{(s-1)\lg z}$$
$$(z - 0\,.\,i)^{s-1} = e^{2\pi i(s-1)} z^{s-1} = e^{2\pi i(s-1)} e^{(s-1)\lg z},$$

le logarithme y étant pris en sens arithmétique. Nous avons évidemment

$$K = \int_{\infty} \frac{e^{-wz}\, z^{s-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i x - z}} + \int_{(\alpha\beta\gamma\alpha)} \frac{e^{-wz}\, z^{s-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i x - z}} + e^{(s-1)2\pi i} \int_{a}^{\infty} \frac{e^{-wz}\, z^{s-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i x - z}}$$

[1] *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (Monatsber. der Preuss. Akad. der Wissensch. 1859).

[2] Zeitschrift für Mathem. und Physik t. 27, 1882.

et en nous rappelant de ce que

$$\lim_{a=0} \int\limits_{(a\beta\gamma a)} \frac{e^{-wz} z^{s-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i x - z}} = 0$$

nous aurons

$$K = 2ie^{s\pi i} \sin \pi s \Gamma(s) \mathfrak{K}(w, x, s),$$

et puisqu'on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

il s'ensuit la formule

$$(4) \qquad \mathfrak{K}(w, x, s) = e^{-s\pi i}\Gamma(1 - s)\frac{1}{2\pi i} K(w, x, s).$$

L'intégrale K donnée par la formule (3) existe évidemment pour chaque valeur finie de s et on démontre aisément qu'elle est une fonction transcendante entière de cette variable. Cette intégrale devant s'annuler, d'après le théorème de Cauchy, pour $s = 1, 2, 3, \ldots$ et la fonction $\Gamma(1 - s)$ ne devenant infinie que pour ces valeurs-ci, il suit de la formule (4) que $\mathfrak{K}(w, x, s)$ est elle-même une fonction transcendante entière de s; c. q. f. d.

La fonction sous le signe $\int$ dans la formule (3) ne devient infinie que pour $z = 2\pi i(x + \nu)$, $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. Soit C_n le cercle du centre $2\pi i x$ et du rayon $\pi(2n + 1)$, cercle qui ne contient à sa périphérie aucun des infinis de la dite fonction, et représentons par $\mathfrak{A}_n$ le contour composé du contour $(\lambda_n \alpha\beta\gamma\alpha\lambda_n)$ et du cercle C_n parcouru dans le sens *rétrograde,* λ_n désignant l'intersection du cercle C_n avec l'axe réel. Ce contour $\mathfrak{A}_n$ limite une aire finie simplement connexe qui ne contient d'autres infinis de la fonction sous le signe $\int$ dans la formule (3) que les suivants:

$$z = 2\pi i(x + \nu), \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$$

Cela étant, le théorème de Cauchy nous donne

$$(\alpha) \qquad K_n = \int\limits_{\mathfrak{A}_n} \frac{e^{-wz} z^{s-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i x - z}} = -2\pi i \sum_{k=-n}^{n} e^{-2\pi i w(x+k)} \{2\pi i(x + k)\}^{s-1},$$

en désignant par $\{2\pi i(x+k)\}^{s-1}$ la quantité $e^{(s-1)\lg 2\pi i(x+k)}$, la partie imaginaire du logarithme étant supposée ou nulle ou positive et non supérieure à 2π.

La quantité w étant réelle, positive et moindre que l'unité la fonction

$$\frac{e^{-wz}z^s}{1-e^{2\pi ix-z}} = \frac{e^{(1-w)z}z^s}{e^z-e^{2\pi ix}}$$

sera moindre en valeur absolue qu'une certaine quantité finie pour chaque valeur de z appartenant à la circonférence C_n, et si nous supposons que la *partie réelle de s est négative,* cette fonction-là devient infiniment petite pour les valeurs indéfiniment croissantes de n, de sorte que nous aurons

$$\lim_{n=\infty} \int_{C_n} \frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}} = 0,$$

et par conséquent

$$\lim_{n=\infty} K_n = \int_{\infty,0,\infty} \frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}} = K,$$

de sorte que la formule (α) nous donne

$$(5) \qquad K(w, x, s) = -2\pi i e^{-2\pi iwx} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi iw}}{\{2\pi i(x+k)\}^{1-s}}.$$

Il est permis de supposer que la partie réelle de x est entre les limites $(0\ldots 1)$; dans ce cas nous aurons

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi iw}}{\{2\pi i(x+k)\}^{1-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi iw}}{\{2\pi i(x+k)\}^{1-s}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi iw}e^{2k\pi iw}}{\{-2\pi i(1-x+k)\}^{1-s}}.$$

Or on a, d'après les conventions faites plus haut:

$$\{2\pi i(x+k)\}^{1-s} = (2\pi)^{1-s} e^{\frac{\pi i}{2}(1-s)} (x+k)^{1-s},$$

$$\{-2\pi i(1-x+k)\}^{1-s} = (2\pi)^{1-s} e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)} (1-x+k)^{1-s},$$

de sorte que la formule (5) devient

$$(5') \qquad \frac{ie^{2\pi iwx}}{(2\pi)^s} K(w, x, s)$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi iw}}{(x+k)^{1-s}} + e^{2\pi iw + \frac{\pi i}{2}(1-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi iw}}{(1-x+k)^{1-s}}.$$

Nous n'avons défini la fonction $\mathfrak{K}$ que pour les valeurs réelles et positives de w. Représentons par $[u^\sigma]$ la quantité $e^{\sigma \lg u}$, la partie imaginaire de $\lg u$ devant être contenue entre les limites $(-\pi i \ldots \pi i)$, de sorte que la fonction $[u^\sigma]$ sera continue et uniforme dans le plan des u affecté de la *coupure* $(-\infty \ldots 0)$ le long de laquelle celle-là est discontinue, et posons d'une manière générale

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi ix}}{[(w+k)^s]}.$$

D'après cette convention nous aurons

$$(x+k)^{1-s} = [(x+k)^{1-s}], \qquad (1-x+k)^{1-s} = e^{2\pi i(1-s)}[(1-x+k)^{1-s}]$$

et la formule (5') deviendra

$$\frac{ie^{2\pi iwx}}{(2\pi)^s} K(w, x, s)$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)} \mathfrak{K}(x, -w, 1-s) + e^{2\pi iw - \frac{3\pi i}{2}(1-s)} \mathfrak{K}(1-x, w, 1-s)$$

ou, d'après (4), en changeant s en $1-s$:

$$(6) \qquad \mathfrak{K}(w, x, 1-s)$$

$$= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left\{ e^{\pi i\left(\frac{1}{2}s - 2wx\right)} \mathfrak{K}(x, -w, s) + e^{\pi i\left(-\frac{1}{2}s + 2w(1-x)\right)} \mathfrak{K}(1-x, w, s) \right\}.$$

Cette formule devient une relation concrète en supposant que la partie imaginaire de x est supérieure à zéro, que w est une quantité réelle

entre les limites $(0 \dots 1)$ et que la partie réelle de s est positive; si elle fait partie de l'intervalle $(0 \dots 1)$, la même chose aura lieu aussi dans le cas où la valeur de x est réelle. En exprimant les fonctions $\mathfrak{K}$ par les intégrales K au moyen de la formule (4) on obtient une relation entre les trois intégrales

$$K(w, x, 1-s), \qquad K(x, -w, s), \qquad K(1-x, w, s).$$

Remarquons encore que pour $s = 0$ la formule (5) nous donne d'après une digression facile

$$\frac{e^{2\pi i w x}}{1 - e^{2\pi i x}} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{e^{2kw\pi i}}{k - x},$$

formule qui a été donnée par M. Kronecker dans les Sitzungsberichte der Preuss. Akad. der Wissensch. (Avril 1883 et Juillet 1885).

ÜBER DIE INTEGRALE DES VIELKÖRPER-PROBLEMS[1]

VON

H. BRUNS

in LEIPZIG.

I.

1. Die bis jetzt bekannten Integrale des Vielkörper-Problems, nämlich die Schwerpunkts- und Flächen-Sätze und der Satz von der lebendigen Kraft, besitzen die gemeinsame Eigenschaft, dass sie die Coordinaten und die Geschwindigkeits-Componenten nur in algebraischen Verbindungen enthalten. Dieser Umstand, sowie die Vergeblichkeit der bisherigen Bemühungen zur Auffindung weiterer Integrale legen die Vermuthung nahe, dass der Kreis der algebraischen Integrale mit den genannten abgeschlossen sei. Es soll deshalb hier die Aufgabe behandelt werden, alle algebraischen, die Zeit nicht explicite enthaltenden Integrale aufzusuchen. Das Ergebniss ist, wie hier gleich bemerkt werden soll, negativer Art, d. h. die noch fehlenden Integrale sind sämmtlich transcendent.

Es seien $m_\alpha, x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ die Massen und die Coordinaten der materiellen Punkte, $r_{\alpha\beta}$ die Distanz der Massen m_α, m_β,

$$U = \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

die Kräftefunction für den Fall des Newton'schen Gravitationsgesetzes, dann können wir die Bewegungsgleichungen in der Form

$$(1) \qquad \frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha, \qquad \frac{dX_\alpha}{dt} = \frac{1}{m_\alpha}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \quad \text{etc.}$$

[1] Mit Genehmigung des Verfassers abgedruckt aus den Berichten der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1887; Math. Cl. 1—39, 55—82.

schreiben. Wir beschränken uns, wie bereits angedeutet, auf die von t freien Integrale und bezeichnen, wie üblich, als Integral einen aus den $x, X, \ldots$ gebildeten Ausdruck φ, dessen Ableitung nach t unter Berücksichtigung der Differentialgleichungen (1) identisch verschwindet, der also der Bedingung

$$(2) \qquad 0 = \sum_a \frac{\partial\varphi}{\partial x_a} X_a + \ldots + \sum_a \frac{\partial\varphi}{\partial X_a} \cdot \frac{1}{m_a} \frac{\partial U}{\partial x_a} + \ldots$$

genügt. Ausserdem werden wir mit Ausdrücken φ zu thun haben, welche die Bedingung (2) zwar nicht identisch befriedigen, wohl aber in Folge der Bedingung $\varphi = 0$. Derartige Ausdrücke wollen wir, in Ermangelung einer anderen Bezeichnungsweise, kurz »Integralgleichungen« nennen. Solche Ausdrücke entstehen z. B. durch Verbindung und Umformung von Gleichungen, welche Bestandtheile einer allgemeinen, particulären oder singulären Lösung der vorgelegten Differentialgleichungen sind. Im vorliegenden Falle haben wir diese verschiedenen Möglichkeiten nicht näher zu untersuchen; wir können deshalb auch davon absehen, dass das vorgelegte Problem überhaupt keine singulären Lösungen besitzt.

Zur Abkürzung des Ausdruckes wollen wir noch festsetzen, dass die Zeichen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}$ benutzt werden sollen, wenn es sich nur darum handelt, anzuzeigen, dass eine Grösse eine ganze Function oder eine rationale Function ist, ohne dass es dabei auf die besondere Form derselben weiter ankommt.

2. Bei der Aufsuchung der algebraischen Integrale des Systems (1) wollen wir zunächst ein etwas allgemeineres System von Differentialgleichungen zu Grunde legen, und erst später auf das System (1) zurückgehen. Es seien die $2m$ Variablen $x_1, \ldots, x_m$; $y_1, \ldots, y_m$ als Functionen von t durch das Gleichungssystem

$$(3) \qquad \frac{dx_a}{dt} = y_a, \qquad \frac{dy_a}{dt} = A_a(x_1, \ldots, x_m),$$

definirt, wo die A_a algebraische Functionen der $x_1, \ldots, x_m$ ohne t bedeuten. Diese algebraischen Functionen können wir uns immer dargestellt denken als rationale Functionen der x und einer einzigen algebraischen Irrationalität s, welche als Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$(4) \qquad F(s, x_1, \ldots, x_m) = s^n + S_1 s^{n-1} + \ldots + S_n = 0$$

definirt ist, in der $S_\alpha = \mathfrak{G}(x)$. Wir werden vorläufig bezüglich der $A_1, \ldots, A_m, F$ nur folgende zwei Einschränkungen festsetzen. Erstlich soll F eine ganze homogene Function (vom n^{ten} Grade) der Variablen s und x, ohne willkürliche, in den A_α nicht vorkommende Constanten, bedeuten; zweitens sollen die A homogene Functionen der x, s und zwar von einer geraden Ordnung $2N$ sein. Beide Einschränkungen treffen für unser specielles Problem (1) zu. Setzt man nämlich

$$s = \sum r_{\alpha\beta}, \tag{5}$$

und schafft man die Quadratwurzeln, als welche sich die r darstellen, fort, so erhält man für s in der That eine Gleichung der vorausgesetzten Art. Ferner werden die Ableitungen der Kräftefunction in (1) homogene rationale Functionen von den x, y, z und von s, und zwar von der Ordnung -2, indem sich jedes r rational durch diese Variablen ausdrücken lässt. Um sich hiervon zu überzeugen, hat man nur nöthig, in (5) alle Quadratwurzeln bis auf eine fortzuschaffen.

Ein algebraisch von den x, y abhängiges Integral φ der Gleichungen (3) lässt sich nun immer definiren als Wurzel einer gewissen Gleichung

$$\varphi^\nu + B_1\varphi^{\nu-1} + \ldots + B_\nu = 0, \tag{6}$$

in welcher $B_\alpha = \mathfrak{R}(x, y)$ ist, und von der wir voraussetzen dürfen, dass sie nicht in Factoren von ähnlicher Beschaffenheit zerlegbar sei. Die Differentiation nach t liefert

$$\frac{dB_1}{dt}\varphi^{\nu-1} + \ldots + \frac{dB_\nu}{dt} = 0. \tag{7}$$

Verschwinden in dieser Gleichung sämmtliche Coefficienten, so sind die B rational aus den x, y zusammengesetzte Integrale, also φ eine algebraische Verbindung rationaler Integrale. Verschwinden die Ableitungen der B nicht, so nehmen sie die Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$ an, und die Gleichungen (6) und (7) besitzen eine gemeinsame Wurzel, d. h. die Gleichung (6) wird reductibel, wenn man den Variablen x, y die Irrationalität s »adjungirt«. Beide Gleichungen besitzen also einen gemeinsamen Theiler

$$\varphi^q + C_1\varphi^{q-1} + \ldots + C_q, \qquad [C_\alpha = \mathfrak{R}(x, y, s)], \tag{8}$$

welcher nicht in Factoren von ähnlicher Form zerlegbar ist und der verschwindet, wenn für φ das betrachtete algebraische Integral substituirt wird. Die Wiederholung derselben Schlussweise führt zu der Bedingung

$$\frac{dC_1}{dt}\varphi^{q-1} + \ldots + \frac{dC_q}{dt} = 0,$$

welche wegen der Irreductibilität von (8) nicht anders erfüllt sein kann, als wenn die Ableitungen der C sämmtlich verschwinden. Die C sind daher Integrale von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$. Zusammenfassend können wir also sagen: die gesuchten algebraischen Integrale lassen sich immer als algebraische Verbindungen von Integralen der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$ darstellen.

3. Es sei nun φ ein Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$. Denken wir uns dasselbe als Quotienten zweier Polynome von der Form $\mathfrak{G}(x, y, s)$ geschrieben, so können die Coefficienten in Zähler und Nenner ausser den in den Differentialgleichungen auftretenden Constanten noch irgend welche Parameter $a_1, a_2, \ldots$ enthalten, denen beliebige constante Werthe beigelegt werden dürfen, ohne dass φ aufhört Integral zu sein. Wir wollen zeigen, dass ein solches Integral sich allemal als rationale Verbindung von parameterfreien Integralen derselben Art darstellen lässt. Zu dem Ende denken wir uns einen Quotienten φ' zweier Polynome D und E angesetzt, welche genau dieselben Terme wie Zähler und Nenner von φ, aber mit unbestimmten Coefficienten $D_1, D_2, \ldots$, resp. $E_1, E_2, \ldots$ enthalten.

Die Forderung, dass φ' ein Integral sein soll, führt zu der Bedingung

$$D\frac{dE}{dt} - E\frac{dD}{dt} = 0, \tag{9}$$

welche, vollständig entwickelt, eine gewisse Anzahl von Gleichungen liefert, die in Bezug auf die Coefficienten $D_1, D_2, \ldots, E_1, E_2, \ldots$ bilinear sind. Diese Gleichungen sind mit einander verträglich, denn sie werden durch die Coefficienten von φ erfüllt; andererseits sind die $D_1, D_2, \ldots, E_1, E_2, \ldots$ nicht vollständig durch jene Gleichungen bestimmt, wenn φ die Parameter $a_1, a_2, \ldots$ enthält. Die allgemeinste Art und Weise, der Bedingung (9) durch den Quotienten φ' zu genügen, besteht nun darin, dass die $D_1, D_2, \ldots, E_1, E_2, \ldots$ gewissen Ausdrücken gleichgesetzt werden, welche in rationaler Weise 1) eine gewisse Anzahl von Parametern $b_1, b_2, \ldots$; 2) eine einzige

algebraisch von den Parametern b abhängige Grösse c enthalten. Die Grösse c können wir uns definirt denken als Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$c^k + c_1 c^{k-1} + \ldots + c_k = 0, \tag{10}$$

in welcher die $c_1, c_2, \ldots$ die Form $\mathfrak{R}(b)$ besitzen. Aus dem auf diese Art gewonnenen Integral φ' wird φ erhalten, wenn man für die b gewisse Verbindungen der Parameter a einsetzt. Ferner lässt sich jede an φ' ausführbare Umformung oder Zerlegung auch an φ ausführen, so dass wir uns auf die Untersuchung von φ' beschränken dürfen. Wir denken uns nun φ' auf die Form

$$\varphi' = F_0 + F_1 c + \ldots + F_{k-1} c^{k-1}$$

gebracht, wo die F gleich $\mathfrak{R}(x, y, s, b)$ sind. Dieser Ausdruck kann wegen der Irreductibilität von (10) nicht anders ein Integral sein, als wenn die $F_0, F_1, \ldots$ Integrale sind, d. h. man kann jedes Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches die Parameter in nicht rationaler Weise enthält, als ein Aggregat von Integralen der Form $\mathfrak{R}(x, y, s, b)$ darstellen.[1]

4. Es sei jetzt φ ein Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s, b)$. Wir greifen einen der Parameter heraus — derselbe werde b genannt — und betrachten φ als Function von b. Wenn φ oder der reciproke Werth von φ die Form $\mathfrak{G}(b)$ besitzen, so sind offenbar die Coefficienten der einzelnen Potenzen von b in φ oder dem reciproken Ausdrucke Integrale, welche den Parameter b nicht enthalten. Wenn weder φ, noch der reciproke Werth von φ nach b ganz rational sind, so schreiben wir φ in der Form $H : K$, wo H und K die Form $\mathfrak{G}(b)$ besitzen. Zerlegen wir dann φ in den nach b ganzen Theil φ_1 und in den echtgebrochenen Theil ψ_1, so sind, wie man sofort durch Entwickelung von φ nach fallenden Potenzen von b erkennt, φ_1 und ψ_1 Integrale, und zwar sind auch die Coefficienten der einzelnen Potenzen von b in φ_1 Integrale. Den reciproken Werth von ψ_1, welcher unecht gebrochen ist, zerlegen wir wieder

[1] Wenn die Differentialgleichungen gewisse Parameter $e_1, e_2, \ldots$, welche nicht in der Gleichung für s vorkommen, in rationaler Weise enthalten, so lässt sich auf ähnliche Weise zeigen, dass Integrale, in denen die e algebraisch vorkommen, sich auf solche von der Form $\mathfrak{R}(e_1, e_2, \ldots)$ reduciren lassen. Derartige Parameter sind z. B. beim Vielkörperproblem durch die Massen gegeben.

in den ganzen rationalen Theil φ_2 und in den echt gebrochenen ψ_2, dann sind φ_2 und ψ_2 ebenfalls Integrale. Setzt man dieses Verfahren, welches schliesslich von selbst abbricht, bis an's Ende fort, so gelangt man zu der Kettenbruchdarstellung

$$\varphi = \varphi_1 + 1 : \varphi_2 + 1 : \varphi_3 + \ldots,$$

wo die φ_a ganze Functionen der b bedeuten, deren Coefficienten Integrale ohne den Parameter b sind. Durch Wiedereinrichtung des Kettenbruches erhält man dann φ als Quotienten zweier ganzen Functionen von b, deren Coefficienten von b freie Integrale der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$ sind.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erkennt man, dass jedes Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches gewisse Parameter $b_1, b_2, \ldots$ in rationaler Weise enthält, allemal aus einer Anzahl parameterfreier Integrale in ganz oder gebrochen linearer Form zusammengesetzt werden kann. Dieser Satz führt in Verbindung mit den über die Differentialgleichungen (3) gemachten Voraussetzungen sofort zu einer für das Folgende wichtigen Consequenz. Es sei k eine beliebige constante Zahl; man ersetze in den Differentialgleichungen die Grössen x, t und entsprechend s, y durch

$$xk^2, \; tk^{1-2N}, \; sk^2, \; yk^{1+2N},$$

wo N die in § 2 angegebene Bedeutung besitzt, dann hebt sich die Grösse k aus den Differentialgleichungen heraus, und es geht deswegen jedes Integral φ durch diese Substitution wiederum in ein Integral über, welches jedoch jetzt im Allgemeinen den Parameter k enthält. Es sei nun φ ein parameterfreies Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches durch die angegebene Substitution in φ' übergehen möge. Wir schreiben φ in der Form »$\mathfrak{G}(x, y, s)$ dividirt durch $\mathfrak{G}'(x, y, s)$«, dann nimmt jeder Term in Zähler und Nenner nach der Substitution wieder die ursprüngliche Gestalt an, jedoch mit einer bestimmten Potenz von k multiplicirt, deren Exponenten wir als die Dimension des betreffenden Terms bezeichnen. Schreiben wir nun Zähler und Nenner von φ' in der Form

$$L = L_0 k^p + L_1 k^{p-1} + \ldots + L_p,$$

$$M = M_0 k^q + M_1 k^{q-1} + \ldots + M_q,$$

so umfassen die Coefficienten L_α, M_α immer nur Terme gleicher Dimension. Diese Coefficienten müssen nun durch Multiplication mit einem und demselben Factor in Integrale übergehen, und man erkennt leicht, dass man für diesen Multiplicator den reciproken Werth irgend eines der Coefficienten z. B. $1 : L_0$ wählen darf. Wir erhalten dann φ linear zusammengesetzt aus Integralen der Form »$\mathfrak{G}(x, y, s)$ dividirt durch $\mathfrak{G}'(x, y, s)$«, deren Zähler und Nenner nur Terme von gleicher Dimension enthalten. Solche Integrale sollen »homogen in den Dimensionen« oder, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, schlechtweg homogen heissen.

5. Es sei jetzt φ ein homogenes Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches wir uns in die Gestalt $\mathfrak{G}(x, y, s) : \mathfrak{G}'(x, y, s)$ gebracht denken. Da ein von den y freier Ausdruck nicht der Bedingung

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

identisch genügen kann, wenn er nicht gleichzeitig von den x frei ist, so muss wenigstens eine der Variabeln y in φ vorkommen. Es sei dies y_1. Wir denken uns Zähler und Nenner von φ nach y_1 in Linearfactoren zerlegt, setzen also an

$$\varphi = Q(y_1 - \eta_1)^\alpha (y_1 - \eta_2)^\beta (y_1 - \eta_3)^\gamma \cdots \tag{11}$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ganze positive oder negative Zahlen, die η rationale oder algebraische Functionen der Variabeln x, y, s unter Ausschluss von y_1 bedeuten und Q eine rationale Function derselben Variablen ist. Da φ Integral ist, so erhalten wir

$$0 = \frac{d \log \varphi}{dt} = \frac{d \log Q}{dt} + \sum \frac{\alpha}{y_1 - \eta_1}\left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{dt}\right).$$

Zur Umformung dieses Ausdruckes wollen wir für den Augenblick die Zeit t, so weit sie in den Variablen x, y, s unter Ausschluss von x_1 und y_1 vorkommt, mit τ bezeichnen, dann ist

$$\frac{d \log Q}{dt} = \frac{\partial \log Q}{\partial x_1} y_1 + \frac{d \log Q}{d\tau},$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} y_1 + \frac{d\eta_1}{d\tau}.$$

also

$$\text{o} = \frac{\partial \log Q}{\partial x_1} y_1 + \frac{d \log Q}{d\tau} - \sum \alpha \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \sum \frac{\alpha}{y_1 - \eta_1} \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{d\tau} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \right).$$

Da nun y_1 in dieser Gleichung nur insofern vorkommt, als es explicite hingeschrieben ist, so folgt

$$(12) \qquad \frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{d\tau} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = \text{o}.$$

Zur weiteren Verwendung dieser Relation, welche offenbar in Bezug auf η_1 eine partielle Differentialgleichung darstellt, denken wir uns jetzt Zähler und Nenner des betrachteten Integrals φ, statt in Linearfactoren, so weit als möglich in die einfachsten Factoren zerlegt, welche noch die Form $\mathfrak{G}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$ besitzen. Die von einander verschiedenen Theiler, welche die Variablen y wirklich enthalten, mögen mit $\psi_1, \psi_2, \ldots$ bezeichnet werden, so dass wir ansetzen können

$$\varphi = T \psi_1^\lambda \psi_2^\mu, \ldots,$$

wo die $\lambda, \mu, \ldots$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten und T die Form $\mathfrak{R}(x, s)$ besitzt. Die Wurzeln η in (11) werden dann erhalten, wenn man diejenigen ψ, welche y_1 enthalten, gleich Null setzt und nach y_1 auflöst. Es sei $\psi_1(y_1)$ ein solcher Theiler, welcher die in (12) benutzte Wurzel η_1 liefert. Dann erhält man aus der Identität

$$(13) \qquad \psi_1(\eta_1) = \text{o}$$

die Gleichungen

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y_\beta} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial y_\beta}. \qquad \binom{\alpha = 1, 2, \ldots, m}{\beta = 2, 3, \ldots, m}$$

Beachtet man nun noch die Differentialgleichungen (3), so geht (12) successive über in

$$A_1 - \sum_\beta y_\beta \frac{\partial \eta_1}{\partial x_\beta} - \sum_\beta A_\beta \frac{\partial \eta_1}{\partial y_\beta} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = \text{o},$$

$$(\beta = 2, 3, \ldots, m)$$

$$(14) \qquad A_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1} + \sum_\beta y_\beta \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_\beta} + \sum_\beta A_\beta \frac{\partial \psi_1}{\partial y_\beta} + \eta_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = \text{o}.$$

Die linke Seite der letzteren Gleichung ist offenbar nichts anderes, als der vollständig entwickelte Ausdruck für

$$\frac{d\psi_1(y_1)}{dt},$$

vorausgesetzt, dass für y_1 überall die aus (13) sich ergebende Wurzel η_1 geschrieben wird. Hiernach ist also $\psi_1(y_1)$ eine Integralgleichung, denn die Ableitung von ψ_1 nach t verschwindet nach (14) wenn nicht identisch, so doch sicher in Folge der Gleichung

$$\psi_1(y_1) = 0.$$

Derselbe Schluss gilt offenbar für die übrigen Theiler ψ. Angenommen nun man könnte beweisen, dass jeder der Theiler $\psi_1, \psi_2, \ldots$ durch Multiplication mit einem Factor von der Form $\mathfrak{R}(x, s)$ in ein Integral $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ verwandelt werden kann, so würde daraus folgen, dass jedes homogenes Integral φ sich auf die Form

$$\varphi = U\varphi_1^{\lambda}\varphi_2^{\mu}\ldots$$

bringen lässt, wo die homogenen Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die Form $\mathfrak{S}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$ besitzen, und der Factor U, welcher höchstens die x, s enthalten kann, sich auf eine Constante reducirt, weil er der Bedingung

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

genügen muss. Ferner würde damit die Aufgabe, alle algebraischen Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen zu finden, auf die andere zurückgeführt sein, alle homogenen Integrale der Form $\mathfrak{S}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$ zu ermitteln. Wir werden nun zeigen, dass eine solche Reduction der homogenen Integralgleichungen $\psi_1, \psi_2, \ldots$, auf die uns die Untersuchung geführt hat, unter den hier gemachten Voraussetzungen in der That immer möglich ist.

6. Es sei ψ eine homogene Integralgleichung der Form $\mathfrak{S}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$, welche sich nicht in Theiler von ähnlicher Gestalt, die die y wirklich enthalten, zerlegen lässt. Der vollständig entwickelte Ausdruck für die Ableitung von ψ nach t besitzt eine ähnliche Gestalt wie ψ, nur dass

der Grad in Bezug auf die y um eine Einheit höher ist als in ϕ. Diese Ableitung muss verschwinden, wenn ϕ verschwindet, muss also wegen der vorausgesetzten Irreductibilität von ϕ durch ϕ selber theilbar sein, so dass wir ansetzen können

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi \cdot \omega,$$

wo ω in Bezug auf die y ganz linear und ebenso wie ϕ in den Dimensionen homogen ist. Schreiben wir

$$\omega = \omega_0 + \sum y_a \omega_a,$$

so sind die $\omega_0, \omega_1, \ldots$ homogene rationale Functionen von den x, s. Substituirt man ferner für die Variabeln x, t, s, y wie früher

$$xk^2, \; tk^{1-2N}, \; sk^2, \; yk^{1+2N},$$

so ergibt sich, dass die Dimension von ω ungerade ist. Ferner sind die Dimensionen der $\omega_0, \omega_1, \ldots$ gerade, die der y ungerade, es muss also in ω das Glied ω_0 fehlen, d. h. ω ist in Bezug auf die y homogen linear. Dieser Umstand ist für die folgende Beweisführung von wesentlicher Bedeutung und bildet den Grund, weshalb wir in den Differentialgleichungen (3) die A als homogene Functionen gerader Ordnung in Bezug auf die x, s vorausgesetzt haben. Es wäre möglich, dass diese Einschränkung bei einem andern Beweisgange sich als unnöthig herausstellt. Ich gehe auf diese Frage nicht näher ein, weil sie für unser eigentliches Ziel, nämlich die Aufsuchung der algebraischen Integrale des Eingangs aufgestellten Vielkörper-Problems, unerheblich ist.

Es werde ϕ als Polynom der y geschrieben; sein Grad in Bezug auf diese Variabeln sei p, und es werde angesetzt

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \cdots,$$

wo die $\phi_0, \phi_1, \ldots$ die Terme vom Grade $p, p-1, \ldots$ zusammenfassen. Mit Rücksicht auf das Vorhergehende ist dann

$$(15) \qquad \sum y_a \frac{\partial \phi_0}{\partial x_a} = \phi_0 \omega, \qquad \omega = \sum y_a \frac{\partial \log \phi_0}{\partial x_a},$$

so dass es für die Untersuchung von ω lediglich auf das Anfangsglied ψ_0 ankommt. Die Coefficienten ω_a in ω hängen auf einfache Weise mit gewissen Coefficienten in ψ_0 zusammen. Man ordne ψ_0 nach einem der darin vorkommenden y — sagen wir y_1 — und setze an

$$\psi_0 = V_0 y_1^r + V_1 y_1^{r-1} + \ldots + V_r,$$

wo die V ganze Functionen der übrigen y sind, dann folgt aus (15)

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_1} = V_0 \omega_1. \tag{16}$$

Sind $a, a', \ldots$ die Coefficienten des Polynoms V_0, so ist, da die Relation (16) für beliebige y bestehen muss,

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} = a\omega_1, \qquad \frac{\partial a'}{\partial x_1} = a'\omega_1, \quad \text{etc.};$$

wir können also allgemein ansetzen

$$\omega_a = \frac{\partial \log a_a}{\partial x_a},$$

wo die a_a gewisse Coefficienten in ψ_0 bedeuten.

Als Vorbereitung für das Folgende betrachten wir zunächst den Fall, wo die Coefficienten in ψ_0 sämmtlich von der Irrationalität s frei sind. Es sei χ eine Function der x, y, ganz homogen nach den y, rational homogen nach den x, welche der Bedingung

$$\tag{17} \begin{gathered} \sum y_a \frac{\partial \chi}{\partial x_a} = \chi \cdot \tau, \\ \tau = \sum y_a \frac{\partial \log b_a}{\partial x_a}. \end{gathered}$$

genügen, wo die b_a gewisse Coefficienten des nach den y geordneten Ausdruckes χ bedeuten. Man denke sich sämmtliche Coefficienten in χ auf den kleinsten gemeinsamen Nenner M gebracht und den etwa vorhandenen gemeinsamen grössten Theiler L aller Coefficientenzähler aufgesucht, dann ist

$$\chi' = \frac{M}{L}\chi$$

ein Ausdruck von der Form $\mathfrak{G}(x, y)$, welcher keinen von den y unabhängigen Theiler der Form $\mathfrak{G}(x)$ besitzt. Ferner wird

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \chi'}{\partial x_\alpha} = \chi' \cdot \tau',$$

$$(18) \qquad \tau' = \sum y_\alpha \frac{\partial \log b'_\alpha}{\partial x_\alpha},$$

wo die b'_α gewisse Coefficienten in χ' bedeuten. Es sei nun Q ein irreductibler Theiler von b'_α, welcher die Variable x_α wirklich enthält, dann tritt in τ' ein Glied der Form

$$\frac{y_\alpha}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x_\alpha}$$

auf, welches sich, so lange specielle Werthsysteme der y ausgeschlossen bleiben, nicht gegen andere Glieder in τ' fortheben kann. Der Ausdruck τ' wird also sicher unendlich für alle endlichen Werthsysteme der x, für welche Q verschwindet. Es müsste also, da für endliche x die linke Seite von (18) sicher endlich bleibt, wider die Voraussetzung, χ' durch Q theilbar sein. Der Coefficient b'_α ist daher von x_α unabhängig, d. h. τ' ist gleich Null und

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \chi'}{\partial x_\alpha} = 0,$$

woraus folgt, dass sich χ' als eine ganze rationale Verbindung der Ausdrücke

$$x_2 y_1 - x_1 y_2, \quad \ldots, \quad x_m y_1 - x_1 y_m,$$

ohne x_1 darstellen lässt.

7. Zu der Relation

$$(15) \qquad \sum y_\alpha \frac{\partial \log \psi_0}{\partial x_\alpha} = \omega = \sum y_\alpha \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

zurückkehrend, wollen wir den Satz beweisen, dass der Ausdruck

$$\sum \omega_\alpha dx_\alpha$$

ein totales Differential ist, dass also die sogenannten Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial^2 \log}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{a_\alpha}{a_\beta}\right) = 0$$

sämmtlich erfüllt sind. Zu dem Ende wollen wir in ψ_0 die Grössen $y_3, \ldots, y_m$ gleich Null setzen, jedoch, um Unbestimmtheiten zu vermeiden, folgendermassen vorgehen. Wenn ψ_0 durch eine Potenz von y_m theilbar ist, so unterdrücken wir diesen Theiler, welcher für die Gleichung (15) bedeutungslos ist, und bezeichnen ψ_0 mit $\psi_{0,m}$. Darauf setzen wir y_m gleich Null und bezeichnen den Ausdruck, in welchem $\psi_{0,m}$ hierdurch übergeht mit $\psi_{0,m-1}$. Derselbe genügt der Gleichung

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \log}{\partial x_\alpha} \psi_{0,m-1} = \sum y_\alpha \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha}. \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1)$$

Hierauf unterdrücken wir in $\psi_{0,m-1}$ die etwa als Theiler auftretende Potenz von y_{m-1} und setzen y_{m-1} gleich Null, wodurch wir zu dem Ausdrucke $\psi_{0,m-2}$ gelangen, u. s. w. Gelangt man auf diese Weise, bevor auch y_3 gleich Null gesetzt wird, für $\varphi_{0,k}$ zu einem Monom von der Form

$$C y_1^\alpha y_2^\beta \ldots y_k^\lambda,$$

so kann offenbar in ω für die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ der eine Coefficient C gesetzt werden, und es sind die zu den aus $x_1, \ldots, x_k$ gebildeten Variablenpaaren gehörigen Integrabilitätsbedingungen von selbst erfüllt. Wir haben deshalb nur noch den ungünstigsten Fall zu verfolgen, dass man nämlich, nachdem auch y_3 beseitigt ist, mit Unterdrückung der einflusslosen Potenztheiler zu einem ψ_{02} von der Form

$$\psi_{02} = c_0 y_1^q + c_1 y_1^{q-1} y_2 + \ldots + c_q y_2^q$$

gelangt, in welchem q mindestens gleich Eins und die Endcoefficienten c_0 und c_q von Null verschieden sind. Dieses ψ_{02} genügt der Bedingung

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \log \psi_{02}}{\partial x_\alpha} = \sum_\alpha y_\alpha \omega_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2)$$

wo in

$$\omega_\alpha = \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

für die Coefficienten a_1, a_2 offenbar c_0 und c_q zu nehmen sind. Die gefundenen Relationen formen wir um in

$$\psi' = \psi_{02} : c_0 = y_1^q + \frac{c_1}{c_0} y_1^{q-1} y_2 + \ldots + \frac{c_q}{c_0} y_2^q,$$

(19)

$$\sum_1^2 y_\alpha \frac{\partial \log \psi'}{\partial x_\alpha} = y_2 \frac{\partial \log}{\partial x_2} \left(\frac{c_q}{c_0}\right).$$

Die Coefficienten von ψ' können nun die Irrationalität s enthalten. Ist dies der Fall, so gilt die Gleichung (19) für alle Wurzelwerthe $s_1, s_2, \ldots, s_n$, welche s annehmen kann. Summiren wir die den einzelnen Wurzeln entsprechenden Gleichungen (19) und setzen

$$\psi'(s_1) \cdot \psi'(s_2) \ldots \psi'(s_n) = \Psi,$$

$$\frac{c_q(s_1)}{c_0(s_1)} \cdot \frac{c_q(s_2)}{c_0(s_2)} \ldots \frac{c_q(s_n)}{c_0(s_n)} = C,$$

so sind Ψ und C homogen rational nach den x; ferner ist

$$\sum_1^2 y_\alpha \frac{\partial \log \Psi}{\partial x_\alpha} = y_\alpha \frac{\partial \log C}{\partial x_2}.$$

Der Ausdruck Ψ ist also eine Function von derselben Beschaffenheit, wie die vorhin mit χ bezeichnete. Bedeutet H den kleinsten gemeinsamen Nenner der Coefficienten in Ψ, so ist $H\Psi$ eine Function der Form $\mathfrak{G}(x, y)$, welche keinen von den y unabhängigen Theiler der Form $\mathfrak{G}(x)$ besitzt und der Bedingung

$$y_1 \frac{\partial(H\Psi)}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial(H\Psi)}{\partial x_2} = 0$$

genügt. Es ist also, abgesehen von einem constanten Coefficienten

$$H\Psi = (y_1 x_2 - y_2 x_1)^{nq},$$

$$\Psi = \left(y_1 - y_2 \frac{x_1}{x_2}\right)^{nq}.$$

Hieraus folgt sofort

$$\psi' = \left(y_1 - y_2 \frac{x_1}{x_2}\right)^q,$$

$$\frac{c_q}{c_0} = \frac{a_2}{a_1} = \pm \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^q,$$

$$\frac{\partial^2 \log}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = 0.$$

Damit sind offenbar die Integrabilitätsbedingungen allgemein bewiesen, und wir haben ferner für das ursprüngliche ψ_0 die Relation

$$\sum_1^m y_\alpha \frac{\partial \log}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\psi_0}{a_1}\right) = -\sum_2^m y_\alpha \frac{q_\alpha}{x_\alpha},$$

wo die q_α ganze positive Zahlen, die Null eingeschlossen bedeuten. Ferner erkennt man hieraus, dass

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi}{a_1} x_2^{q_2} \dots x_m^{q_m}\right) = 0$$

ist, dass also die Integralgleichung ψ durch den Multiplicator

$$(x_2^{q_2} \dots x_m^{q_m}) : a_1$$

in ein Integral verwandelt wird. W. z. b. w.

Es sei jetzt φ das zu ψ gehörige Integral. Wir spalten dasselbe ähnlich wie ψ, setzen also an

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots,$$

wo φ_0 sich von ψ_0 durch den integrirenden Multiplicator unterscheidet und der Bedingung

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\alpha} = 0$$

genügt. Wir wollen nun zeigen, dass φ_0 sich als eine ganze rationale Function der $m - 1$ Verbindungen

$$x_2 y_1 - x_1 y_2, \qquad x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad \dots, \quad x_m y_1 - x_1 y_m$$

ohne x_1 darstellen lässt. Zur Vereinfachung des Beweises schicken wir folgende Bemerkung vorauf.

8. Angenommen man hätte in dem ursprünglichen System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = y_\alpha, \qquad \frac{dy_\alpha}{dt} = A_\alpha(x_1, x_2, \ldots)$$

statt der Variabeln x, y andere Variable ξ, η durch die lineare Substitution

$$x_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta}\xi_\beta, \qquad y_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta}\eta_\beta$$

eingeführt, in der die c feste Zahlen mit nicht verschwindender Determinante bedeuten, so würde dadurch an den über die Differentialgleichungen und die Irrationalität s gemachten Voraussetzungen nichts geändert worden sein; es würde also auch die ganze bisherige Untersuchung ohne Weiteres für das transformirte System gültig bleiben. Insbesondere würde der Satz, dass die hier untersuchten Integralgleichungen durch einen Multiplicator von der Form $\mathfrak{R}(x, s)$ in Integrale übergehen, wenn er vor der Transformation gilt, auch nach derselben gelten und umgekehrt. Diese Bemerkung benutzen wir in folgender Weise. Die Discriminante Δ der Gleichung für s ist eine homogene ganze rationale Function der x vom Grade

$$n(n-1) = \mu.$$

Die Discriminante Δ' der transformirten Gleichung für s geht aus Δ hervor, wenn man statt der x die ξ einführt. Bei passender Wahl der Substitutionscoefficienten c lässt sich nun stets erreichen, dass in Δ' die Glieder mit

$$\xi_1^\mu, \xi_2^\mu, \ldots, \xi_m^\mu$$

wirklich vorkommen. Es ist deshalb keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass bereits in der ursprünglichen Discriminante Δ die Glieder mit

$$x_1^\mu, x_2^\mu, \ldots, x_m^\mu$$

wirklich vorkommen, da diese Eigenschaft, wenn sie ursprünglich nicht vorhanden ist, durch eine vor Beginn der ganzen Untersuchung vorgenommene Transformation stets herbeigeführt werden kann.

Wir denken uns nun in der Gleichung für s den Variablen $x_2, \ldots, x_m$ irgend welche endliche Werthe, dem x_1 dagegen einen ausserordentlich grossen Werth beigelegt, dann lässt sich jede Wurzel s nach fallenden Potenzen von x_1 in eine Reihe entwickeln, welche unter den gemachten Voraussetzungen die Form

$$s = \sigma x_1 + \sigma_0 + \frac{\sigma_1}{x_1} + \frac{\sigma_2}{x_1^2} + \ldots$$

besitzt. Hierin ist σ die Wurzel einer Gleichung

$$\sigma^n + \Sigma_1 \sigma^{n-1} + \ldots + \Sigma_n = 0,$$

welche keine mehrfachen Wurzeln besitzt und deren Coefficienten nur von den in der ursprünglichen Gleichung für s auftretenden Constanten, aber nicht von den x abhängen. Die übrigen Coefficienten $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ besitzen die Gestalt $\mathfrak{R}(\sigma)$ resp. $\mathfrak{G}(x_2, \ldots, x_m)$.

Führt man jetzt statt der Variablen x neue Variable p durch die lineare Substitution

$$p_1 = x_1, \qquad p_2 = x_2 - x_1 \frac{y_2}{y_1}, \quad \ldots, \quad p_m = x_m - x_1 \frac{y_m}{y_1}$$

ein, so erhält man das Glied mit p_1^n in der Discriminante, wenn man an Stelle der $x_1, \ldots, x_m$ resp.

$$p_1, \quad p_1 \frac{y_2}{y_1}, \quad \ldots, \quad p_1 \frac{y_m}{y_1}$$

schreibt. Der Coefficient von p_1^n in der Discriminante wird also, so lange specielle Werthsysteme der y ausgeschlossen werden, von Null verschieden sein. Infolge dessen lässt sich für grosse Werthe von p_1 und endliche Werthe der $p_2, \ldots, p_m$ die Irrationalität s nach fallenden Potenzen von p_1 in die Reihe

$$s = \rho p_1 + \rho_0 + \frac{\rho_1}{p_1} + \frac{\rho_2}{p_1^2} + \ldots$$

entwickeln, wo ρ eine von den p unabhängige Irrationalität, $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots$ dagegen ganze rationale Functionen der $\rho, p_2, \ldots, p_m$ bedeuten.

Dies vorausgeschickt betrachten wir wieder den Anfangsterm φ_0 in dem Integral φ. Derselbe stellt sich, wenn er die Irrationalität s wirklich enthält, zunächst dar in der Form

$$\mathfrak{R}(p_1, p_2, \ldots, p_m, s),$$

muss aber in Wirklichkeit von p_1 frei sein. Entwickelt man nun s und darauf φ_0 nach fallenden Potenzen von p_1, so muss diese Reihe sich auf den einen von p_1 freien Term reduciren, welcher nach den vorausgehenden Bemerkungen die Variablen $p_2, \ldots, p_m$ nur in rationaler Weise enthält, d. h. φ_0 enthält auch die x nur in rationaler Weise und ist in Wirklichkeit frei von s. Hieraus folgt weiter, wenn man die in § 6 über die Ausdrücke χ und χ' gemachten Bemerkungen beachtet, dass φ_0 eine ganze Function der x ist.

9. Fassen wir die Resultate, zu denen wir bisher gelangt sind, zusammen, so können wir folgende Sätze aussprechen.

Gegeben ist das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_a}{dt} = y_a, \qquad \frac{dy_a}{dt} = A_a, \qquad (a = 1, 2, \ldots, m)$$

in welchem die A als homogene rationale Functionen von der geraden Ordnung $2N$ aus den x und einer gewissen Irrationalität s zusammengesetzt sind. Die Grösse s ist Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$s^n + S_1 s^{n-1} + \ldots + S_n = 0,$$

deren linke Seite eine ganze homogene Function der s, x von der n-ten Ordnung bildet. Wenn das vorgelegte System von Differentialgleichungen algebraische, von t freie Integrale besitzt, so lassen sich dieselben allemal darstellen als algebraische Functionen eines oder mehrerer Integrale φ, welche folgende Eigenschaften besitzen:

1) Jedes φ ist eine ganze rationale Function der y, eine rationale Function der x und s.

2) φ ist in den Dimensionen homogen, d. h. wenn man für die x, s, y resp. setzt

$$xk^2, \quad sk^2, \quad yk^{1+2N}, \quad (k = \text{Constante}),$$

so nimmt φ wieder die ursprüngliche Gestalt an, jedoch versehen mit einer gewissen Potenz von k als Factor.

3) Bedeutet φ_0 das Aggregat der Glieder in φ, welche in Bezug auf die y von der höchsten Ordnung sind, so sind, wenn φ_0 nach den y geordnet wird, die Coefficienten ganze rationale Functionen der x ohne gemeinsamen Theiler.

4) Der Ausdruck φ_0 genügt der Bedingung

$$\sum y_a \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_a} = 0,$$

enthält also die x nur in den Verbindungen

$$y_1 x_a - y_a x_1. \qquad (a = 2, 3, \ldots, m)$$

Nachdem wir bis zu diesem Punkte gelangt sind, brechen wir die allgemeine Untersuchung ab und wenden uns wieder zu dem Vielkörper-Problem zurück, welches ja den Ausgangspunkt bildete, und welches, wie bereits bemerkt, einen speciellen Fall der hier betrachteten Differentialgleichungen repräsentirt.

10. Es seien

$$m_a, \quad x_a, \quad y_a, \quad z_a \qquad (a = 1, 2, \ldots, n)$$

die Massen und die Coordinaten der einzelnen materiellen Punkte in dem betrachteten Vielkörper-Problem,

$$X_a, \quad Y_a, \quad Z_a$$

die Geschwindigkeitscomponenten, $r_{a\beta}$ die Distanz der beiden Massen m_a, m_β, dann haben wir

$$\frac{dx_a}{dt} = X_a, \qquad \frac{dX_a}{dt} = A_a = \sum_\beta m_\beta \frac{x_\beta - x_a}{r_{a\beta}^3},$$

$$\frac{dy_a}{dt} = Y_a, \qquad \frac{dY_a}{dt} = B_a = \sum_\beta m_\beta \frac{y_\beta - y_a}{r_{a\beta}^3},$$

$$\frac{dz_a}{dt} = Z_a, \qquad \frac{dZ_a}{dt} = C_a = \sum_\beta m_\beta \frac{z_\beta - z_a}{r_{a\beta}^3},$$

wo bei den Summationen, ebenso wie weiterhin, zu beachten ist, dass Glieder mit r_{aa} nicht vorkommen dürfen. Es sei φ ein homogenes Integral von der Form

$$\mathfrak{G}(X, Y, Z) \quad \text{resp.} \quad \mathfrak{R}(x, y, z),$$

welches in Bezug auf die X, Y, Z vom Grade p ist; ferner setze man

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots,$$

wo die $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ die Aggregate der Glieder bedeuten, welche in den X, Y, Z von den Ordnungen $p, p-1, \ldots$ sind; endlich bezeichne man die Zeit t, je nachdem sie in den Coordinaten oder in den Geschwindigkeiten vorkommt, mit u resp. v, führe also die Operationssymbole

$$\frac{\partial}{\partial u} = \sum_a \left(X_a \frac{\partial}{\partial x_a} + Y_a \frac{\partial}{\partial y_a} + Z_a \frac{\partial}{\partial z_a} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \sum_a \left(A_a \frac{\partial}{\partial X_a} + B_a \frac{\partial}{\partial Y_a} + C_a \frac{\partial}{\partial Z_a} \right)$$

ein, dann muss sein

$$(22) \qquad \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_0}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = 0.$$

Diese beiden Bedingungen werden sich als für unseren Zweck ausreichend erweisen. Die erste Bedingung besagt, dass φ_0 die x, y, z nur ganz rational in den Verbindungen

$$f_a = x_a X_1 - x_1 X_a, \qquad g_a = y_a X_1 - x_1 Y_a, \qquad h_a = z_a X_1 - x_1 Z_a$$

enthält, d. h. wenn man statt der x, y, z in φ_0 die Ausdrücke

$$x_a = \frac{f_a}{X_1} + x_1 \frac{X_a}{X_1}, \qquad y_a = \frac{g_a}{X_1} + x_1 \frac{Y_a}{X_1}, \qquad z_a = \frac{h_a}{X_1} + x_1 \frac{Z_a}{X_1}$$

einsetzt, so verwandelt sich φ_0 in eine Function der Grössen

$$f_2, \ldots, f_n; \; g_1, \ldots, g_n; \; h_1, \ldots, h_n,$$

welche von x_1 frei ist, und abgesehen davon, dass eine Potenz von X_1

als Nenner vorkommen kann, die X, Y, Z nur ganz rational enthält. Im Folgenden werden wir voraussetzen, dass φ_0 bereits durch die f, g, h ausgedrückt sei.

Bilden wir jetzt die Ableitung von φ_0 nach v, so enthalten die einzelnen Glieder im Nenner die dritte Potenz eines $r_{\alpha\beta}$, sind aber im Übrigen rational aus den verschiedenen Variabeln zusammengesetzt. Bilden wir ferner die verschiedenen Irrationalitäten, welche einschliesslich der $r_{\alpha\beta}$ selber dadurch entstehen, dass man je zwei, je drei u. s. w. verschiedene $r_{\alpha\beta}$ mit einander multiplicirt, und bezeichnet man diese Irrationalitäten in irgend einer Reihenfolge mit $\rho_1, \rho_2, \ldots$, so lässt sich φ_2 stets auf die Gestalt

$$\varphi_2 = \varphi_{20} + \sum \frac{\varphi_{2\alpha}}{\rho_\alpha}$$

bringen, wo die $\varphi_{20}, \varphi_{21}, \ldots$ rational aus den x, y, z, X, Y, Z zusammengesetzt sind. Mit Rücksicht auf (22) folgt daraus, dass

$$\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial u} = 0$$

ist, und dass ferner der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_{2\alpha}}{\rho}\right)$$

allemal verschwindet, wenn die Irrationalität ρ sich nicht auf ein einziges $r_{\alpha\beta}$ reducirt. Führt man ferner in φ_2 statt der x, y, z die f, g, h ein, wobei möglicherweise x_1 sich nicht aus φ_2 fortheben wird, so geht die partielle Ableitung von φ_2 nach u über in

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} X_1 .$$

Ersetzt man ebenso in der Ableitung von φ_0 nach v die ursprünglichen Variablen durch die f, g, h, X, Y, Z und x_1, und integrirt nach x_1, indem alle übrigen Grössen als constant angesehen werden, so darf die Integration keine logarithmischen, sondern nur algebraische Glieder liefern. Dieser Umstand wird uns gestatten, die Verbindungen der f, g, h, aus welchen sich φ_0 zusammensetzt, vollständig zu bestimmen.

11. Zur Abkürzung der Ausdrucksweise wollen wir festsetzen, dass die Indices $\alpha, \beta, \ldots$ die Werthe $1, 2, \ldots, n$, dagegen die Indices $\lambda, \mu, \ldots$ nur die Werthe $2, 3, \ldots, n$ annehmen sollen. Wir suchen nun diejenigen Glieder in der Ableitung von φ_0 nach v auf, welche die dritte Potenz von $r_{1\lambda}$ resp. $r_{\lambda\mu}$ im Nenner enthalten. Die Ableitung von φ_0 besitzt zunächst die Gestalt

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial g_1}(y_1 A_1 - x_1 B_1) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_1}(z_1 A_1 - x_1 C_1)$$

$$+\sum_\lambda \left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda}(x_\lambda A_1 - x_1 A_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial g_\lambda}(y_\lambda A_1 - x_1 B_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_\lambda}(z_\lambda A_1 - x_1 C_\lambda)\right\}$$

$$+\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_1}A_1 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Y_1}B_1 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Z_1}C_1 + \sum_\lambda\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda}A_\lambda + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Y_\lambda}B_\lambda + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Z_\lambda}C_\lambda\right\}.$$

Die Glieder, welche $r_{1\lambda}^3$ im Nenner enthalten, werden, mit Fortlassung des Nenners, und wenn wir der Kürze halber das Zeichen S einführen, um eine Summation über die drei Coordinatenaxen anzudeuten,

$$m_\lambda\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial g_1}(y_1 x_\lambda - x_1 y_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_1}(z_1 x_\lambda - x_1 z_\lambda)\right\} + m_\lambda(x_\lambda - x_1)\sum_\mu\left[\mathsf{S}\left(x_\mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\mu}\right)\right]$$

$$+ m_1 x_1 \mathsf{S}(x_\lambda - x_1)\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda} + \mathsf{S}(x_\lambda - x_1)\left(m_\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_1} - m_1\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda}\right).$$

Ähnlich werden die zu $r_{\lambda\mu}$ gehörigen Terme

$$-x_1\mathsf{S}(x_\mu - x_\lambda)\left(m_\mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda} - m_\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\mu}\right)$$

$$+\mathsf{S}(x_\mu - x_\lambda)\left(m_\mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda} - m_\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\mu}\right).$$

Führt man hierin auch für die ausserhalb φ_0 vorkommenden x, y, z die Grössen x_1, f, g, h ein, so müssen die Terme, welche das Quadrat von x_1 enthalten, verschwinden, weil sonst die oben erwähnte Inte-

gration nach x_1 auf logarithmische Glieder führen würde. Es muss also sein

$$o = m_\lambda \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial g_1}(Y_1 X_\lambda - X_1 Y_\lambda) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial h_1}(Z_1 X_\lambda - X_1 Z_\lambda) \right\}$$

$$+ m_\lambda (X_\lambda - X_1) \sum_\mu \left[\mathrm{S}\left(X_\mu \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\mu} \right) \right] + m_1 X_1 \mathrm{S}\left[(X_\lambda - X_1) \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\lambda} \right],$$

$$o = \mathrm{S}\left[(X_\mu - X_\lambda)\left(m_\mu \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\lambda} - m_\lambda \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\mu} \right) \right].$$

Die vorstehenden Bedingungen, in welchen die Indices λ, μ alle zulässigen Werthe anzunehmen haben, können wir jetzt als lineare partielle Differentialgleichungen mit den unabhängigen Variablen f, g, h und mit der abhängigen Variablen φ_0 ansehen. Die Coefficienten sind von den f, g, h unabhängig und deshalb bei der Aufsuchung der allgemeinen Lösung als Constanten anzusehen. Um die allgemeine Lösung aufzustellen, genügt im vorliegenden Falle die Kenntniss einer gewissen Anzahl von Particularlösungen, welche die f, g, h homogen linear enthalten. Fünf solcher Lösungen werden durch die bekannten Integrale des Vielkörper-Problems geliefert; es wird sich zeigen, dass damit die gemeinsamen Lösungen des oben angesetzten Systems erschöpft sind.

Es werde gesetzt

$$\Sigma m_a x_a = L, \qquad \Sigma m_a y_a = M, \qquad \Sigma m_a z_a = N,$$

$$\Sigma m_a X_a = L', \qquad \Sigma m_a Y_a = M', \qquad \Sigma m_a Z_a = N',$$

dann erhalten wir, wenn die Buchstaben a, b, c ganz willkürliche Grössen bedeuten, zunächst drei Particularlösungen A', B', C' durch die eine zusammenfassende Gleichung

$$aA' + bB' + cC' = \begin{vmatrix} a & L & L' \\ b & M & M' \\ c & N & N' \end{vmatrix}.$$

Diese drei Lösungen sind jedoch nicht unabhängig von einander, weil zwischen ihnen die Relation

$$L'A' + M'B' + N'C' = o$$

besteht. Drei weitere Lösungen A, B, C erhalten wir in ähnlicher Weise durch die zusammenfassende Gleichung

$$a'A + b'B + c'C = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} a' & x_\alpha & X_\alpha \\ b' & y_\alpha & Y_\alpha \\ c' & z_\alpha & Z_\alpha \end{vmatrix},$$

wo die a', b', c' ebenfalls willkürliche Zahlen bedeuten. Dass in der That die $A, A', \ldots$ Lösungen sind, lässt sich auch ohne Rechnung durch folgende Überlegung nachweisen. Die $A, A', \ldots$ sind nämlich nichts anderes als die Flächenintegrale und drei aus den Schwerpunktsätzen zusammengesetzte Integrale, und zwar homogene Integrale von der hier untersuchten Beschaffenheit, bei denen überdies das φ sich auf den Anfangsterm φ_0 reducirt. Es müssen also die hier für φ_0 aufgestellten Bedingungen von selbst erfüllt sein.

Drückt man jetzt die $A, A', \ldots$ durch die f, g, h aus, so erhält man zunächst

$$X_1(aA' + bB' + cC') = \begin{vmatrix} a, & 0 & + \sum_\lambda m_\lambda f_\lambda, & L' \\ b, & m_1 g_1 & + \sum_\lambda m_\lambda g_\lambda, & M' \\ c, & m_1 h_1 & + \sum_\lambda m_\lambda h_\lambda, & N' \end{vmatrix}$$

$$X_1(a'A + b'B + c'C) = m_1 \begin{vmatrix} a' & 0 & X_1 \\ b' & g_1 & Y_1 \\ c' & h_1 & Z_1 \end{vmatrix} + \sum_\lambda m_\lambda \begin{vmatrix} a' & f_\lambda & X_\lambda \\ b' & g_\lambda & Y_\lambda \\ c' & h_\lambda & Z_\lambda \end{vmatrix}.$$

Wir untersuchen nun, ob aus diesen Gleichungen sich die Grössen

$$g_1, \quad h_1, \quad f_2, \quad g_2, \quad h_2$$

durch die $A, A', \ldots$ und die übrigen f, g, h ausdrücken lassen. Nun sind in den Ausdrücken für

$$X_1 B', \quad X_1 C', \quad X_1 A, \quad X_1 B, \quad X_1 C$$

die Coefficienten der fünf Grössen

$$m_1 g_1, \quad m_1 h_1, \quad m_2 f_2, \quad m_2 g_2, \quad m_2 h_2$$

durch nachstehende Zeilen gegeben

$$\begin{array}{ccccc} 0, & +L', & -N', & 0, & +L', \\ -L', & 0, & +M', & -L', & 0, \\ +Z_1, & -Y_1, & 0, & +Z_2, & -Y_2, \\ 0, & +X_1, & -Z_2, & 0, & +X_2, \\ -X_1, & 0, & +Y_2, & -X_2, & 0, \end{array}$$

und es kommt jetzt darauf an, zu zeigen, dass die aus diesen Zeilen gebildete Determinante nicht identisch verschwindet. Berechnet man dieselbe, so erhält man

$$L'(X_2 - X_1)\begin{vmatrix} X_2 & L' & X_1 \\ Y_2 & M' & Y_1 \\ Z_2 & N' & Z_1 \end{vmatrix};$$

die Grössen $g_1, \ldots, h_2$ lassen sich also in der That durch die $A, \ldots$ und die übrigen f, g, h ausdrücken. Infolge dessen dürfen wir bei der Aufsuchung etwaiger weiterer Particularlösungen voraussetzen, dass dieselben von den $g_1, \ldots, h_2$ unabhängig sind.

12. Die noch aufzusuchenden Particularlösungen bezeichnen wir mit χ und setzen fest, dass die Indices $\sigma, \tau, \ldots$ nur die Werthe $3, 4, \ldots, n$ annehmen sollen. Die gesuchten Lösungen müssen den Differentialgleichungen genügen, welche aus denen für φ_0 dadurch entstehen, dass man für φ_0 die Grösse χ schreibt, ferner die Ableitungen von χ nach den $g_1, \ldots, h_2$ gleich Null setzt und die Fälle $\lambda, \mu = 2$ von den Fällen $\lambda, \mu = \sigma$ trennt. Auf diese Weise erhält man zunächst das System

$$(23) \qquad 0 = \sum_\sigma \left[S\left(X_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma} \right) \right],$$

$$(24) \qquad 0 = m_\tau (X_\tau - X_1) \sum_\sigma \left[S\left(X_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma} \right) \right] + m_1 X_1 S\left((X_\tau - X_1) \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} \right),$$

$$(25) \qquad 0 = S\left((X_\tau - X_2) \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} \right),$$

$$(26) \qquad 0 = S\left[(X_\sigma - X_\tau) \left(m_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} - m_\tau \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma} \right) \right].$$

Aus (23) und (24) folgt

$$(27) \qquad 0 = \mathrm{S}\left((X_\tau - X_1)\frac{\partial\chi}{\partial f_\tau}\right)$$

und hieraus in Verbindung mit (25) die zusammenfassende Gleichung

$$(28) \qquad a\frac{\partial\chi}{\partial f_\tau} + b\frac{\partial\chi}{\partial g_\tau} + c\frac{\partial\chi}{\partial h_\tau} = k_\tau \begin{vmatrix} a\,, & X_1 - X_\tau\,, & X_2 - X_\tau \\ b\,, & Y_1 - Y_\tau\,, & Y_2 - Y_\tau \\ c\,, & Z_1 - Z_\tau\,, & Z_2 - Z_\tau \end{vmatrix},$$

in welcher k_τ einen vorläufig unbestimmten Proportionalitätsfactor bedeutet. Bezeichnen wir den Werth, welchen die Determinante in (28) für

$$a = X_\sigma - X_\tau, \qquad b = Y_\sigma - Y_\tau, \qquad c = Z_\sigma - Z_\tau$$

annimmt, mit D, so erhält man mit einer kleinen Umformung

$$D = |X_\sigma - X_\tau\,, X_1\,, X_2| + |X_\sigma\,, X_\tau\,, X_1 - X_2|,$$

wo von den Determinanten nur die erste Zeile angesetzt ist. Durch Vertauschung der Indices σ und τ ändert also D nur sein Vorzeichen. Infolge dessen erhalten wir aus (28) die beiden Gleichungen

$$\mathrm{S}\left((X_\sigma - X_\tau)\frac{\partial\chi}{\partial f_\tau}\right) = k_\tau\,.\,D,$$

$$\mathrm{S}\left((X_\sigma - X_\tau)\frac{\partial\chi}{\partial f_\sigma}\right) = k_\sigma\,.\,D,$$

also mit Berücksichtigung von (26)

$$(m_\sigma k_\tau - m_\tau k_\sigma)D = 0,$$

d. h. es ist

$$k_\sigma = l m_\sigma,$$

wo l einen von dem Index σ unabhängigen Factor bedeutet. Hiermit liefert die Gleichung (28) weiter

$$\mathrm{S}\left(X_\tau\frac{\partial\chi}{\partial f_\tau}\right) = l m_\tau\,|X_\tau\,, X_1\,, X_2|,$$

woraus, wenn man nach τ summirt, mit Rücksicht auf (23)

$$0 = l\left|\Sigma m_\tau X_\tau\,,\ X_1\,,\ X_2\right|$$

folgt. Es verschwinden also l, die k und infolge dessen auch die sämmtlichen Ableitungen von χ, d. h. es existiren ausser den bereits angegebenen fünf Particularlösungen keine weiteren, und es enthält φ_0 die Variablen x, y, z nur in den Verbindungen

$$A\,,\ B\,,\ C\,, \qquad A'\,,\ B'\,,\ C'.$$

Eliminirt man also z. B. y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 mittelst der Ausdrücke $A, A', \ldots$ aus φ_0, so fallen alle übrigen x, y, z von selbst heraus. Bei dieser Elimination nimmt φ_0 die Form $\mathfrak{G}(A, A', \ldots)$ an, dagegen kann φ_0 aufhören eine ganze Function der X, Y, Z zu sein. Wir wollen nun zeigen, dass sich φ_0 immer auf die Form

$$\mathfrak{G}(A\,,\ B\,,\ C\,,\ A'\,,\ B'\,,\ C'\,,\ X\,,\ Y\,,\ Z)$$

bringen lässt.

13. Da bei der Elimination von $y_1, \ldots, z_2$ aus φ_0 die übrigen x, y, z von selbst fortfallen, so kann man die Elimination in der Weise bewirken, dass man sowohl in φ_0 als auch in B', C', A, B, C die schliesslich fortfallenden Variablen von vornherein gleich Null setzt, die $y_1, \ldots, z_2$ durch die $B', \ldots$ ausdrückt und die so gewonnenen Ausdrücke in das vereinfachte φ_0 substituirt. Nun sind die Grössen

$$m_1y_1\,,\quad m_1z_1\,,\quad m_2x_2\,,\quad m_2y_2\,,\quad m_2z_2$$

in B', C', A, B, C mit Coefficienten verbunden, die durch nachstehende Zeilen gegeben sind

$$\begin{array}{ccccc}
0\,, & +L'\,, & -N'\,, & 0\,, & +L'\,,\\[1ex]
-L'\,, & 0\,, & +M'\,, & -L'\,, & 0\,.\\[1ex]
+Z_1\,, & -Y_1\,, & 0\,, & +Z_2\,, & -Y_2\,,\\[1ex]
0\,, & +X_1\,, & -Z_2\,, & 0\,, & +X_2\,,\\[1ex]
-X_1\,, & 0\,, & +Y_2\,, & -X_2\,, & 0\,,
\end{array}$$

welche, wie wir bereits früher gesehen haben, zu der Determinante

$$E = L'(X_2 - X_1)\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & L' \\ Y_1 & Y_2 & M' \\ Z_1 & Z_2 & N' \end{vmatrix}$$

führen. Der umgeformte durch die B', C', A, B, C dargestellte Ausdruck von φ_0 könnte also eine Potenz von E im Nenner haben, oder die Gestalt

$$\mathfrak{G}(B', C', A, B, C, X, Y, Z) : E^q$$

besitzen. Diese Form ist nun von der Art und Weise, wie die Elimination im Einzelnen ausgeführt wird, unabhängig. Hätte man die Elimination mittelst der Variablen

$$y_1, \quad z_1, \quad x_3, \quad y_3, \quad z_3$$

bewirkt, so würde man im Nenner von φ_0 statt des vorstehenden E ein anderes

$$E' = L'(X_3 - X_1)\,|\,X_1, X_3, L'\,|$$

erhalten haben. Nun haben E und E' nur den Theiler L' gemeinsam, woraus wir schliessen, dass die übrigen Theiler von E oder E' in dem Ausdrucke von φ_0 sich gegen entsprechende Theiler des Zählers fortheben, so dass nur eine Potenz von L' im Nenner von φ_0 verbleiben kann.

Hätte man statt der Variablen y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 die Variablen x_1, z_1, x_2, y_2, z_2 und statt B', C' die Ausdrücke C', A' bei der Elimination benutzt, so würde man für φ_0 einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{G}(C', A', A, B, C, X, Y, Z) : (M')^r$$

statt des früheren

$$\mathfrak{G}(B', C', A, B, C, X, Y, Z) : (L')^q$$

erhalten haben. Auf analoge Art könnte man noch zu einer dritten Darstellung

$$\varphi_0 = \mathfrak{G}(A', B', A, B, C, X, Y, Z) : (N')^s$$

gelangen. Um nun zu zeigen, dass diese Nenner immer durch passende

Umformung von φ_0 beseitigt werden können, haben wir nur den Fall in's Auge zu fassen, wo keine der drei Zahlen q, r, s gleich Null ist.

Zunächst schicken wir die Bemerkung voraus, dass abgesehen von der Relation

$$A'L' + B'M' + C'N' = 0 \tag{29}$$

die $A, A', \ldots$ von einander unabhängig sind, d. h. es existirt zwischen den $A, A', \ldots$ keine weitere Relation

$$0 = PA + QB + RC + P'A' + Q'B' + R'C',$$

in welcher die Coefficienten $P, P', \ldots$ von den x, y, z unabhängig sind. Infolge dessen darf man in φ_0 die Variablen

$$A, \ldots, A', \ldots, X_1, \ldots, Y_1, \ldots, Z_1 \ldots$$

als Grössen ansehen, welche, abgesehen von der einen Einschränkung (29), völlig willkürlich gewählt werden können. Es sei nun auf irgend eine Art für φ_0 die Darstellung

$$\varphi_0 = H(A', B', C', A, B, C, L', M', N', X_2, Y_2, Z_2, \ldots, X_n, Y_n, Z_n):(L')^m$$

gefunden worden, wo in φ_0 die X_1, Y_1, Z_1 durch die L', M', N' und die übrigen X, Y, Z ausgedrückt zu denken sind, dann kann, so lange die x, y, z, X, Y, Z, endliche Werthe besitzen, φ_0 nicht unendlich werden. Ordnen wir nun φ_0 nach fallenden Potenzen von L', setzen also an

$$\varphi_0 = \frac{H_0}{L'^m} + \frac{H_1}{L'^{m-1}} + \cdots,$$

wo die $H_0, H_1, \ldots$ ganze Functionen der vorkommenden Grössen bedeuten, so muss, sobald L' verschwindet, sobald also

$$B'M' + C'N' = 0$$

ist, der Ausdruck H_0 verschwinden, wie auch die Werthe der übrigen darin vorkommenden Grössen beschaffen sein mögen. Es muss also H_0 durch

$$B'M' + C'N'$$

theilbar sein, d. h. man hat identisch

$$H_0 = (B'M' + C'N')H_{01},$$

wo H_{01} wiederum eine ganze Function der darin vorkommenden Grössen ist. Infolge dessen wird

$$\varphi_0 = \frac{H_1 - A'H_{01}}{L'^{m-1}} + \frac{H_2}{L'^{m-2}} + \dots.$$

Wendet man auf diese Darstellung dieselbe Schlussweise an, u. s. w., so gelangt man schliesslich dahin, den Nenner von φ_0 ganz zu beseitigen, d. h. φ_0 ist immer als eine ganze Function der Grössen

$$A, B, C, A', B', C', X_1, Y_1, Z_1, \dots, X_n, Y_n, Z_n$$

darstellbar.

14. Um nun die Verbindungen der X, Y, Z zu ermitteln, welche in φ_0 vorkommen, bilden wir in

$$0 = \frac{\partial\varphi_0}{\partial v} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}$$

zunächst das erste Glied rechts. Dasselbe hat die Gestalt

$$\sum \Phi_{\alpha\beta} : r^3_{\alpha\beta},$$

wo

$$\Phi_{\alpha\beta} = \mathrm{S}\left[(x_\beta - x_\alpha)\left(m_\beta \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\alpha} - m_\alpha \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\beta}\right)\right],$$

und die Ableitungen von φ_0 sich nur auf die explicite vorkommenden X, Y, Z beziehen, weil die A, B, C, A', B', C' den Bedingungen

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial C'}{\partial v} = 0$$

genügen. Führt man in dem Quotienten

$$\Phi_{\alpha\beta} : r^3_{\alpha\beta}$$

statt der x, y, z die f, g, h und x_1 als Variable ein, so muss die Integration desselben nach x_1 den mit dem Factor $-X_1$ versehenen Term in φ_2 liefern, welcher $r_{\alpha\beta}$ im Nenner hat, und der im Übrigen eine ganze Function der X, Y, Z ist. Nun ist

$$\int dx (Px + Q)(ax^2 + 2bx + c)^{-\frac{3}{2}} = (Vx + W)(ax^2 + 2bx + c)^{-\frac{1}{2}},$$

wenn zwischen den von x unabhängigen Grössen P, Q, a, b, c, V, W die Relationen

$$D = b^2 - ac,$$

$$DV = bP - Qa,$$

$$DW = cP - Qb,$$

$$D(Vx + W) = P(bx + c) - Q(ax + b)$$

stattfinden. Mit Rücksicht hierauf setzen wir an

$$x_\alpha - x_\beta = x_{\alpha\beta}, \ldots\ldots$$

$$f_\alpha - f_\beta = f_{\alpha\beta}, \ldots\ldots$$

$$X_\alpha - X_\beta = X_{\alpha\beta}, \ldots\ldots$$

$$m_\alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_\beta} - m_\beta \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_\alpha} = A_{\alpha\beta}, \ldots\ldots$$

$$r_{\alpha\beta}^2 = ax_1^2 + 2bx_1 + c,$$

$$aX_1^2 = \mathsf{S}X_{\alpha\beta}^2, \qquad bX_1^2 = \mathsf{S}X_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}, \qquad cX_1^2 = \mathsf{S}f_{\alpha\beta}^2,$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = Px_1 + Q,$$

$$PX_1 = \mathsf{S}X_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}, \qquad QX_1 = \mathsf{S}f_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta},$$

$$(ax_1 + b)X_1 = \mathsf{S}X_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta}, \qquad (bx_1 + c)X_1 = \mathsf{S}f_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta},$$

$$(b^2 - ac)X_1^2 = (\mathsf{S}X_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta})^2 - (\mathsf{S}X_{\alpha\beta}^2).(\mathsf{S}x_{\alpha\beta}^2) = E,$$

$$Er_{\alpha\beta}\int dx_1 \frac{\Phi_{\alpha\beta}}{r_{\alpha\beta}^3} = X_1^2 \begin{vmatrix} P & ax_1 + b \\ Q & bx_1 + c \end{vmatrix} = FX_1,$$

$$FX_1 = \begin{vmatrix} \mathsf{S}X_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} & \mathsf{S}X_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta} \\ \mathsf{S}f_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} & \mathsf{S}f_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta} \end{vmatrix},$$

$$F = \begin{vmatrix} \mathsf{S}X_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} & \mathsf{S}X_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta} \\ \mathsf{S}x_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} & \mathsf{S}x_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta} \end{vmatrix}.$$

Der Ausdruck

$$-\frac{F}{Er_{\alpha\beta}}$$

ist, wie bereits erwähnt, derjenige Term in φ_2, welcher $r_{\alpha\beta}$ als Nenner enthält; es muss also der Quotient $F:E$ eine ganze Function der X, Y, Z sein. Da nun F und E ganze Functionen der $x, X, \ldots$ sind, und da E als Function der $x, X, \ldots$ betrachtet irreductibel ist, so muss der Quotient $F:E$ auch eine ganze Function der x, y, z sein.

Um die Vorstellung zu fixiren, nehmen wir für den Augenblick an, dass die Indices α, β in F und E auf die Werthe $3, 4, \ldots$ beschränkt seien. Weiter denken wir uns in F und E die x, y, z zunächst durch die f, g, h und x_1, und dann die Grössen g_1, h_1, f_2, g_2, h_2 durch die A, B, C, B', C' und die übrigen f, g, h ausgedrückt. Durch diese linearen Transformationen wird an der Theilbarkeit von F durch E nichts geändert. Der Ausdruck für E enthält dann nur die Variablen $f_\alpha, g_\alpha, h_\alpha, f_\beta, g_\beta, h_\beta$, während F sich zunächst als eine ganze homogene Function zweiten Grades derselben f, g, h und von x_1 darstellt, deren Coefficienten die x, y, z nur in den Verbindungen $A, A', \ldots$ enthalten. Setzen wir demgemäss an

$$F = F_0 x_1^2 + F_1 x_1 + F_2,$$

so müssen F_0, F_1, F_2 einzeln durch E theilbar sein. Nun sind die F_1 und F_2, wenn sie vorkommen, in Bezug auf die $f_\alpha, \ldots, h_\beta$ von der ersten, resp. nullten Ordnung, woraus wir schliessen, dass sie in Wirklichkeit identisch verschwinden, dass also F sich auf den Term F_2 reducirt, und dass infolge dessen

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

ist. Führt man nun die Differentiation nach u aus, so erhält man

$$(\mathrm{S} x_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}) \,.\, (\mathrm{S} X_{\alpha\beta}^2) = (\mathrm{S} X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta})(\mathrm{S} X_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}),$$

und hieraus

$$(\mathrm{S} f_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}) \,.\, (\mathrm{S} X_{\alpha\beta}^2) = (\mathrm{S} X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta})(\mathrm{S} X_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}).$$

Die vorstehende partielle Differentialgleichung für φ_0 kann nun, da die

$A_{\alpha,\beta}, \ldots$ die $f_\alpha, \ldots, h_\beta$ nicht enthalten, nicht anders bestehen, als wenn die mit den f, g, h multiplicirten Glieder links und rechts einzeln einander gleich sind, d. h. es ist

$$\frac{A_{\alpha,\beta}}{X_{\alpha,\beta}} = \frac{B_{\alpha,\beta}}{Y_{\alpha,\beta}} = \frac{C_{\alpha,\beta}}{Z_{\alpha,\beta}} = \frac{\mathrm{S} X_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}}{\mathrm{S} X_{\alpha,\beta} X_{\alpha,\beta}}.$$

Zu diesem System von Differentialgleichungen, welche aus Gründen der Symmetrie auch noch gelten, wenn die Indices α, β die Werthe 1 oder 2 annehmen, gehören zunächst die vier Particularlösungen

$$L' = \sum m_\alpha X_\alpha, \qquad M' = \sum m_\alpha Y_\alpha, \qquad N' = \sum m_\alpha Z_\alpha,$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum m_\alpha (X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 + Z_\alpha^2).$$

Es fragt sich nun, ob noch andere gemeinsame Particularlösungen existiren können. Die Integration der Gleichung

$$\frac{A_{\alpha,\beta}}{X_{\alpha,\beta}} = \frac{B_{\alpha,\beta}}{Y_{\alpha,\beta}}$$

ist durch die drei Particularlösungen L', M', T vollständig erschöpft, d. h. die weiteren noch aufzusuchenden Particularlösungen dürfen als unabhängig von $X_\alpha, X_\beta, Y_\alpha, Y_\beta$ vorausgesetzt werden. Dies führt zunächst zu der Gleichung

$$C_{\alpha,\beta} = 0,$$

welcher die Lösung N' genügt. Infolge dessen können die noch etwa fehlenden Lösungen als unabhängig auch von Z_α, Z_β vorausgesetzt werden. Es muss also, wenn noch weitere Lösungen, die von den gefundenen unabhängig sind, existiren, durch einen von $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ unabhängigen Ausdruck φ_0 das System

$$A_{\alpha\gamma} : X_{\alpha\gamma} = B_{\alpha\gamma} : Y_{\alpha\gamma} = C_{\alpha\gamma} : Z_{\alpha\gamma}$$

oder

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial X_\gamma} : X_{\alpha\gamma} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial Y_\gamma} : Y_{\alpha\gamma} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial Z_\gamma} : Z_{\alpha\gamma}$$

befriedigt werden können, was offenbar nicht möglich ist, wenn φ_0 die

X_γ, Y_γ, Z_γ wirklich enthält. Wir schliessen hieraus, dass der Ausdruck φ_0 die Variablen X, Y, Z nur in vier von den x, y, z unabhängigen Verbindungen, nämlich L', M', N', T enthält. Eliminirt man also aus

$$\varphi_0 = \mathfrak{G}(A, B, C, A', B', C', X_1, Y_1, Z_1, \ldots, X_n, Y_n, Z_n)$$

vier der $X, Y, \ldots$, z. B. X_1, Y_1, Z_1, X_2 mittelst der Ausdrücke L', M', N', T, so müssen die übrigen X, Y, Z von selbst herausfallen. Man erkennt leicht, dass dann φ_0 die Gestalt

$$\varphi_0 = \mathfrak{K}(A, B, C, A', B', C', L', M', N', T)$$

annimmt, wo $\mathfrak{K}$ eine ganze Function der darin vorkommenden Grössen bedeutet. Hiermit sind wir im Wesentlichen an das Ziel gelangt. Ist nämlich

$$U = \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

die Kräftefunction, so sind die Ausdrücke

$$A, B, C, A', B', C', L', M', N', T - U$$

homogene Integrale von der hier untersuchten Art. Der Ausdruck

$$J = \mathfrak{K}(A, B, \ldots, M', N', T - U)$$

ist ein ebensolches Integral, welches entwickelt und nach den X, Y, Z geordnet, mit dem hier untersuchten Integral φ in den Gliedern höchster Ordnung, nämlich in dem Anfangsterm φ_0 übereinstimmt. Die Differenz

$$\varphi' = \varphi - J$$

ist wiederum ein Integral von derselben Art wie φ, nur dass die Ordnung in Bezug auf die X, Y, Z in φ' um wenigstens eine Einheit niedriger ist, als in φ. Es lässt sich also von dem vorgelegten Integral φ stets ein aus den bekannten Integralen zusammengesetztes Integral in der Weise abspalten, dass das übrig bleibende Integral nach den X, Y, Z von niedrigerer Ordnung ist als φ. Wiederholt man diese Abspaltung, so gelangt man schliesslich zu einem Integral, welches die X, Y, Z nicht enthält, welches sich deshalb auf eine Constante reducirt.

Hiermit haben wir den Satz gewonnen:

Bei dem Vielkörper-Problem ist der Kreis der algebraisch aus den Coordinaten und Geschwindigkeiten zusammengesetzten und von t freien Integrale vollständig mit den bekannten Integralen, nämlich den Schwerpunktsätzen, den Flächensätzen und dem Satze von der lebendigen Kraft abgeschlossen.

15. Aus dem gefundenen Ergebniss lassen sich sofort einige weitere Folgerungen ziehen. Wir führen ein

$$m_\alpha X_\alpha = \xi_\alpha, \qquad m_\alpha Y_\alpha = \eta_\alpha, \qquad m_\alpha Z_\alpha = \zeta_\alpha$$

und schreiben demgemäss die lebendige Kraft in der Form

$$T = \sum \frac{1}{2m_\alpha}(\xi_\alpha^2 + \eta_\alpha^2 + \zeta_\alpha^2);$$

ferner setzen wir, wenn U wieder die Kräftefunction bedeutet,

$$T - U = H,$$

dann haben die Bewegungsgleichungen die Gestalt

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}, \qquad \frac{d\xi_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \qquad \text{etc.}$$

Diese Gleichungen transformiren wir, indem wir statt der $x, \xi, \ldots$ neue Variable

$$p_1, \ldots, p_{3n}, \qquad q_1, \ldots, q_{3n}$$

durch die Gleichungen

$$\xi_\alpha = \frac{\partial V}{\partial x_\alpha}, \qquad \eta_\alpha = \frac{\partial V}{\partial y_\alpha}, \qquad \zeta_\alpha = \frac{\partial V}{\partial z_\alpha},$$

$$q_\alpha = \frac{\partial V}{\partial p_\alpha}$$

einführen, wo V irgend einen aus den Grössen x, y, z, p zusammengesetzten Ausdruck bedeutet. Die transformirten Gleichungen werden dann bekanntlich

$$\frac{\partial q_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

wo H durch die q, p ausgedrückt zu denken ist. Wir wollen eine derartige Transformation für das Dreikörper-Problem wirklich durchführen; für das Vielkörper-Problem gestaltet sich die Rechnung nicht wesentlich anders.

Die den ξ, η, ζ correspondirenden Variablen sollen mit $p, p_1, \ldots, p_8$, die den x, y, z entsprechenden mit $q, q_1, \ldots, q_8$ bezeichnet werden. Ferner soll die transformirende Function V in Bezug auf die p homogen linear sein, woraus sofort folgt, dass man ansetzen kann

$$V = pq + p_1 q_1 + \cdots + p_8 q_8,$$

wo für die q bestimmte Functionen der x, y, z gesetzt zu denken sind. Der Kürze halber möge das Zeichen S eine Summation über die drei Coordinatenaxen, das Zeichen Σ eine cyclische Summation über die Indices 1, 2, 3 bedeuten. Dies vorausgeschickt setzen wir zunächst an

$$q_1^2 = \mathsf{S}(x_2 - x_3)^2, \qquad q_2^2 = \mathsf{S}(x_3 - x_1)^2, \qquad q_3^2 = \mathsf{S}(x_1 - x_2)^2,$$

d. h. die q_1, q_2, q_3 sind die Distanzen der drei Körper von einander. Weiter sollen sein

$$q_6 = \Sigma m_1 x_1, \qquad q_7 = \Sigma m_1 y_1, \qquad q_8 = \Sigma m_1 z_1.$$

Endlich bilden wir mit den neun willkürlich gewählten Constanten

$$a_1, \quad b_1, \quad c_1, \quad a_2, \quad b_2, \quad c_2, \quad a_3, \quad b_3, \quad c_3,$$

zwischen denen die Relationen

$$\Sigma a_1 = \Sigma b_1 = \Sigma c_1 = 0,$$

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1,$$

stattfinden sollen, die Ausdrücke

$$q_5 = \Sigma c_1 z_1,$$

$$q_4 = \Sigma b_1 (x_1 + i y_1),$$

$$q = [\Sigma a_1 (x_1 + i y_1)] : q_4,$$

dann haben wir die Transformationsgleichungen

$$\xi_1 = \frac{p_2}{q_2}(x_1 - x_3) + \frac{p_3}{q_3}(x_1 - x_2) + p\frac{a_1 - b_1 q}{q_4} + p_4 b_1 + p_6 m_1,$$

$$\eta_1 = \frac{p_2}{q_2}(y_1 - y_3) + \frac{p_3}{q_3}(y_1 - y_2) - p\frac{a_1 - b_1 q}{iq_4} + p_4 ib_1 + p_7 m_1,$$

$$\zeta_1 = \frac{p_2}{q_2}(z_1 - z_3) + \frac{p_3}{q_3}(z_1 - z_2) \qquad + p_5 c_1 \qquad + p_8 m_1,$$

. . . .

Die p ergeben sich hieraus als lineare Functionen der ξ, η, ζ, mit Coefficienten, welche algebraisch von den x, y, z abhängen. Aus diesen Gleichungen folgern wir zunächst

$$\Sigma m_1 X_1 = \Sigma \xi_1 = p_6 \Sigma m_1,$$

$$\Sigma m_1 Y_1 = \Sigma \eta_1 = p_7 \Sigma m_1,$$

$$\Sigma m_1 Z_1 = \Sigma \zeta_1 = p_8 \Sigma m_1,$$

d. h. die p, q mit den Indices $6, 7, 8$ sind, von constanten Factoren abgesehen, gleich den Geschwindigkeiten und den Coordinaten des Schwerpunktes. Weiter bilden wir die complexe Verbindung der beiden ersten Flächensätze

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \xi_1 \\ i & y_1 & \eta_1 \\ 0 & z_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} = p_5 \Sigma c_1 (y_1 - ix_1) + q_7 p_8 - q_8 p_7 + i(q_8 p_6 - q_6 p_8)$$

und den dritten Flächensatz

$$\sum \begin{vmatrix} x_1 & \xi_1 \\ y_1 & \eta_1 \end{vmatrix} = i p_4 q_4 + p_7 q_6 - p_6 q_7 \,.$$

Der Ausdruck für H endlich setzt sich zusammen aus den drei Gliedern

$$H' = \sum \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 q_1^2 \frac{m_2 + m_3}{2m_2 m_3} + \sum \frac{p_2}{q_2}\frac{p_3}{q_3}\frac{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}{2m_1}$$

$$+ \sum \frac{1}{m_1}\{p(a_1 - b_1 q) + p_4 q_4 b_1\}\left\{\frac{p_3}{q_3}(a_3 - b_3 q) - \frac{p_2}{q_2}(a_2 - b_2 q)\right\} - U,$$

$$H'' = p_3 \sum \frac{p_1}{q_1}(z_2 - z_3)\left(\frac{c_2}{m_2} - \frac{c_3}{m_3}\right) + p_5^2 \sum \frac{c_1^2}{2m_1},$$

$$H''' = \frac{1}{2}(p_6^2 + p_7^2 + p_8^2)\sum m_1.$$

In den transformirten Differentialgleichungen

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 8)$$

spaltet sich jetzt zunächst das System

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'''}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'''}{\partial q_\alpha}, \qquad (\alpha = 6, 7, 8)$$

ab, dessen Integration die Schwerpunktsätze liefert. Nehmen wir den Schwerpunkt als Coordinatenanfang, so haben wir die p, q mit den Indices 6, 7, 8 einfach gleich Null zu setzen, und erhalten das System zwölfter Ordnung

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}(H' + H''), \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial p_\alpha}(H' + H''). \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 5)$$

Wählt man ferner die invariable Ebene als xy-Ebene, so ist p_5 gleich Null zu setzen. Infolge dessen reducirt sich das System zwölfter Ordnung auf ein System zehnter Ordnung mit den Variablen $p, \ldots, p_4, q, \ldots, q_4$ und auf eine Quadratur zur Bestimmung von q_5. Das letztgenannte System hat die Form

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_\alpha}, \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 4)$$

und giebt, da H' die Variablen p_4 und q_4 nur zu dem Producte $p_4 q_4$ verbunden enthält, in Folge der Gleichungen

$$\frac{dq_4}{dt} = \frac{\partial H}{\partial(p_4 q_4)} q_4, \qquad \frac{dp_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial(p_4 q_4)} p_4$$

die Relation

$$\frac{d(p_4 q_4)}{dt} = 0,$$

welche sich vorhersehen liess, da $ip_4 q_4$ unter den gemachten Voraussetzungen das dritte Flächenintegral ist. Von dem System zehnter Ordnung spaltet sich also das System achter Ordnung

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_\alpha}, \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

ab, wo in H' an Stelle von $p_4 q_4$ eine Constante zu schreiben ist, die wir mit k bezeichnen wollen. Die beiden übrig bleibenden Gleichungen liefern dann den Ausdruck für

$$\log \frac{q_4}{p_4}$$

durch eine Quadratur.

16. Um das System achter Ordnung noch weiter zu reduciren, schreiben wir

$$H' = H_1 p + H_2,$$

wo H_1 und H_2 offenbar von p frei sind. Ferner setzen wir an

$$L = p + \frac{H_2 - H'}{H_1} = p + K = 0,$$

und können dann die Gleichungen zunächst in der Form

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial p_\alpha} : \frac{\partial L}{\partial H'}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} : \frac{\partial L}{\partial H'}$$

schreiben, wo nach Ausführung der partiellen Differentiationen für H' wieder der ursprüngliche Ausdruck gesetzt zu denken ist. Wegen der Relation

$$\frac{dq}{dt} = -1 : \frac{\partial L}{\partial H'}$$

folgt aber für $\alpha = 1, 2, 3$

$$\frac{dq_\alpha}{dq} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}.$$

Für das vorstehende System sechster Ordnung ist der in K auftretende Ausdruck H' ein Integral, wir dürfen also für H' eine Constante $-h$ schreiben und haben damit das Problem auf die Integration eines Systems sechster Ordnung und die Quadratur

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q}$$

zurückgeführt.

Eine weitere Reduction als auf dieses System sechster Ordnung, welches schon mehrfach, wenn auch in abweichender Gestalt, abgeleitet worden ist, lässt sich, wie aus den Untersuchungen von Herrn Lie über Gruppen (Mathem. Annalen, Bd. 8) hervorgeht, an der Hand der bisher bekannten Integrale nicht erreichen. Der vollständige Ausdruck für K hat die Gestalt

$$K = \frac{H_2 + h}{H_1},$$

$$H_1 = \sum A_1 \frac{p_1}{q_1},$$

$$A_1 = (a_1 - b_1 q)\left\{\frac{a_2 - b_2 q}{m_2} - \frac{a_3 - b_3 q}{m_3}\right\}, \quad \text{etc.},$$

$$H_2 = \sum \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 q_1^2 \frac{m_2 + m_3}{2m_2 m_3} + \sum \frac{p_2}{q_2}\frac{p_3}{q_3}\frac{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}{2m_1} + \sum B_1 \frac{p_1}{q_1} - U,$$

$$B_1 = k(a_1 - b_1 q)\left\{\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right\}, \quad \text{etc.},$$

$$U = \sum \frac{m_2 m_3}{q_1}.$$

Es lässt sich jetzt unschwer zeigen, dass unser System sechster Ordnung keine algebraischen Integrale besitzt. Angenommen es existirte ein algebraisch aus den p, q zusammengesetztes Integral, dann ergiebt sich zunächst, weil K eine rationale Function der p, q ist, die in § 2 be-

nutzte Schlussweise, dass dieses Integral sich als eine algebraische Verbindung von Integralen darstellen lässt, welche die p, q nur rational enthalten. Für die rationalen Integrale ferner zeigt die in § 3 benutzte Methode der unbestimmten Coefficienten, dass in diesen Integralen die in K auftretenden Constanten, nämlich die m, a, b, c, k, h nur in algebraischen Verbindungen vorkommen können. Setzt man nun in einem solchen rationalen Integral für die p, q ihre Ausdrücke durch die ursprünglichen Variablen x, y, z, ξ, η, ζ und ferner für die Constanten k und h, welche ja algebraische Integrale bedeuten, ebenfalls ihre Ausdrücke durch die ursprünglichen Variablen, so gelangt man zu einem Integrale des Dreikörper-Problems, welches die Coordinaten und die Geschwindigkeiten nur algebraisch enthält. Ein derartiges Integral reducirt sich aber allemal, wenn man den Schwerpunkt als Coordinatenanfang und die invariable Ebene als xy-Ebene wählt, auf eine algebraische Function von h und k allein, womit offenbar die Nichtexistenz algebraischer Integrale für das System sechster Ordnung bewiesen ist.

Bei den bisher mittelst der Hamilton-Jacobi'schen Methoden erledigten Problemen der analytischen Mechanik beruht die Lösung im Allgemeinen darauf, dass man, nöthigenfalls durch eine passende Transformation, eine sogenannte Trennung der Variablen herbeiführt. Dieses Princip lässt sich etwas allgemeiner, als es bei Jacobi geschieht, folgendermassen formuliren. Gegeben ist das kanonische System

$$\frac{dq_\alpha}{dq} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dq} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, \ldots$$

$$H = f(q, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n);$$

die Variablen lassen sich trennen, wenn zwischen den Variablen $q, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$, einer neuen Variablen p und gewissen Parametern $c_1, c_2, \ldots$ Gleichungen von der Form

$$H_1(p, q, c_1, c_2, \ldots) = 0, \qquad H_2(p_1, q_1, c_1, c_2, \ldots) = 0, \quad \text{etc.}$$

aufgestellt werden können, welche folgenden Bedingungen genügen: 1° die Anzahl der Gleichungen und der Parameter c ist gleich der Anzahl der Variablenpaare p, q; p_1, q_1; ...; 2° jede Gleichung enthält nur ein Variablenpaar; 3° eliminirt man mittelst der angegebenen Gleichungen aus dem Ausdrucke

$$p + H$$

je eine Componente eines Paares, so fallen die anderen Componenten von selbst heraus, d. h. der genannte Ausdruck verwandelt sich in eine von den p, q freie Function der Parameter c. Aus diesen Eigenschaften folgt dann weiter, dass, wenn man die Gleichungen $H_1, H_2, \ldots$ nach den c auflöst, die für die c sich ergebenden Ausdrücke Integrale des vorgelegten Problems sind.

Aus diesen Bemerkungen lässt sich das Ergebniss ableiten, dass es nicht möglich ist, bei unserem System sechster Ordnung eine Trennung der Variablen durch rein algebraische Berührungstransformationen, d. h. Transformationen, bei welchen die kanonische Form der Differentialgleichungen erhalten bleibt, herbeizuführen. Bei einer algebraischen Transformation nämlich verwandelt sich K in eine algebraische Function der neuen Variablen. Wenn nun in diesem Falle eine Trennung nach den neuen Variablen möglich ist, so lassen sich die Parameter c stets so wählen, dass die Zusatzgleichungen

$$H_1 = 0, \qquad H_2 = 0, \qquad \ldots$$

die Variablen und die Parameter nur algebraisch enthalten. Man würde hiermit auf algebraische Integrale des Systems sechster Ordnung geführt. Darnach sind also die Transformationen, welche die Trennung der Variablen gestatten, nothwendiger Weise transcendent, ebenso wie die noch fehlenden Integrale.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist nun allerdings noch nicht die Möglichkeit ausgeschlossen, dass man nicht auf algebraischem Wege wenigstens zu einem neuen Integrale gelangen könnte. Diese Frage ist im Wesentlichen gleichbedeutend mit der andern: existiren Integrale, welche durch Quadraturen über algebraische Ausdrücke der p, q entstehen? Die Erledigung dieser Frage, zu welcher man nach Erschöpfung des Gebietes der algebraischen Integrale auch noch durch Überlegungen ganz anderer Art hingedrängt wird, würde auf dem hier eingeschlagenen Wege als der nächste nothwendige Schritt erscheinen, bevor man den Versuch macht, in den Differentialgleichungen selbst Fingerzeige bezüglich der für das Problem angemessenen transcendenten Transformationen aufzusuchen.

II.

17. In der vorangehenden Abtheilung habe ich gezeigt, dass bei dem Vielkörper-Problem die Gesammtheit der von der Zeit t freien, algebraischen Integrale erhalten wird, wenn man aus den neun bekannten Integralen dieser Art alle möglichen algebraischen Verbindungen bildet. Als Ergänzung hierzu wollen wir nun noch den Fall behandeln, dass ein Integral ausser den Coordinaten und Geschwindigkeiten auch noch die Variable t algebraisch enthält, wie dies ja bei den Schwerpunkts-Integralen eintreten kann. Zu dem Ende denken wir uns das System

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = f_\alpha(x_1, \ldots, x_n, s), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

von Differentialgleichungen vorgelegt, in welchem die f rationale Functionen der x und einer einzigen, algebraisch von den x abhängenden Irrationalität s bedeuten, während t weder in den f, noch in s explicite vorkommt. Dieses System ist offenbar noch allgemeiner, als das in § 2 zu Grunde gelegte. Ist nun φ ein algebraisch von den Variablen x, t abhängendes Integral, so zeigt man zunächst durch die früher benutzten Überlegungen, dass sich φ algebraisch aus Integralen von der Form $\mathfrak{R}(x, s, t)$ zusammensetzen lässt. Wir nehmen deshalb an, dass φ von vornherein die Gestalt $\mathfrak{R}(x, s, t)$ besitze, denken uns dann φ als Quotienten zweier Polynome von der Form $\mathfrak{G}(x, s, t)$ geschrieben, und in Zähler und Nenner die Linearfactoren von der Form

$$t - t_1, \qquad t - t_2, \quad \ldots$$

aufgesucht, in denen die $t_1, t_2, \ldots$ algebraische und von t freie Functionen der x sind. Bildet man jetzt die vollständige logarithmische Ableitung von φ nach t und beachtet, dass in den Differentialgleichungen

t nicht explicite vorkommt, so erkennt man, dass die angegebenen Linearfactoren sämmtlich Integrale sind, und dass ferner der nach Unterdrückung dieser Factoren in φ übrigbleibende Bestandtheil von der Form $\mathfrak{R}(x, s)$ ebenfalls Integral ist. Die verschiedenen in t linearen Integrale unterscheiden sich von einander um algebraische und von t freie Integrale. Hiernach ist zur Aufstellung aller Integrale der betrachteten Art nur erforderlich zu kennen 1° alle algebraischen und von t freien Integrale, 2° ein einziges von t abhängiges Integral der Form $t - t_1$. Beim Vielkörper-Problem ist deshalb das Gebiet aller algebraischen Integrale durch die bekannten zehn völlig erschöpft.

18. Am Schlusse der ersten Abtheilung waren Betrachtungen über die Frage angestellt worden, wie weit es möglich sei, durch algebraische Transformationen der Lösung des Vielkörper-Problems näher zu kommen. In dem Nachstehenden soll dieser Gegenstand weiter verfolgt werden, wobei wir uns einstweilen auf das Dreikörper-Problem beschränken. Um später den Gedankengang nicht zu unterbrechen, sollen zunächst gewisse Nebenuntersuchungen vorweg erledigt werden.

In § 15 waren die Bewegungsgleichungen durch Benutzung der Schwerpunkts- und Flächensätze auf ein System achter Ordnung

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_\alpha}, \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

reducirt worden, in welchem die Variablen nur noch von der Configuration des Körpersystems abhängen. Die Gleichungen enthalten ausser den vier Paaren abhängiger Variablen $p, q, \ldots$ an Constanten die drei Massen m_α, die Grösse k und die sechs Grössen a_α, b_α. Die Grösse ik ist der constante Werth des dritten Flächenintegrals, wenn die invariable Ebene als Fundamentalebene gewählt wird; die Constanten a_α, b_α konnten innerhalb der Einschränkungen

$$(31) \qquad a_2 b_3 - a_3 b_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$$

willkürlich gewählt werden. Bildet man mittelst der transformirenden Function

$$V = rq + \tfrac{1}{2} \sum r_\alpha q_\alpha^2, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

die Substitutionsgleichungen

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}, \qquad s = \frac{\partial V}{\partial r},$$

$$p_\alpha = \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}, \qquad s_\alpha = \frac{\partial V}{\partial r_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

aus denen

$$r = p, \qquad s = q,$$

$$r_\alpha = \frac{p_\alpha}{q_\alpha}, \qquad s_\alpha = \frac{1}{2} q_\alpha^2$$

folgt, so werden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{ds_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial r_\alpha}, \qquad \frac{dr_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial s_\alpha}. \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

Im Folgenden werden wir, je nach Umständen, das System der p, q oder r, s benutzen, jedoch für das eine Paar r, s die ursprüngliche Bezeichnung p, q beibehalten. Ferner soll wie früher das Zeichen Σ ohne Summationsbuchstaben eine cyclische Summation über die Indices $1, 2, 3$ bedeuten. Dies festgesetzt stellen wir zuerst die weiterhin benutzten Abkürzungen und Relationen zusammen. Es sei

$$C = \sum \frac{s_1}{m_1}, \qquad C'' = \Sigma r_1 s_1,$$

$$D = \Sigma r_2 r_3, \qquad D' = \sum \frac{r_2 + r_3}{m_1},$$

$$L_2 = C'' D' - CD,$$

$$H_1 = \Sigma A_1 r_1 = M_0 + M_1 q + M_2 q^2,$$

$$A_1 = (a_1 - b_1 q)\left(\frac{a_2 - b_2 q}{m_2} - \frac{a_3 - b_3 q}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$M_0 = \sum_\alpha M_{0\alpha} r_\alpha, \qquad M_1 = \Sigma M_{1\alpha} r_\alpha, \qquad M_2 = \Sigma M_{2\alpha} r_\alpha.$$

$$M_{01} = \quad a_1\left(\frac{a_2}{m_2} - \frac{a_3}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$M_{11} = -a_1\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right) - b_1\left(\frac{a_2}{m_2} - \frac{a_3}{m_3}\right), \quad \text{etc}$$

$$M_{21} = \quad b_1\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_3, \qquad m_4 = m_1 m_2 m_3, \qquad m = \frac{m_0}{m_4},$$

$$\mu_0 = \sum \frac{b_1^2}{m_1}, \qquad \mu_1 = \sum \frac{a_1 b_1}{m_1}, \qquad \mu_2 = \sum \frac{a_1^2}{m_1}.$$

$$\mu_0\mu_2 - \mu_1\mu_1 = m.$$

$$L_1 = \sum r_1 a_1\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right) = \sum_\alpha L_{1\alpha} r_\alpha,$$

$$L_{11} = a_1\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$\sum_\alpha \frac{L_{1\alpha}}{m_\alpha} = m.$$

Für die M, L bestehen, wenn f_1, f_2, f_3 drei willkürliche Zahlen bedeuten, die zusammenfassende Determinanten-Relationen

$$|f_\alpha, M_{1\alpha}, M_{2\alpha}| = \mu_0 \sum \frac{f_1}{m_1}, \qquad |f_\alpha, M_{2\alpha}, M_{0\alpha}| = \mu_1 \sum \frac{f_1}{m_1},$$

$$|f_\alpha, M_{0\alpha}, M_{1\alpha}| = \mu_2 \sum \frac{f_1}{m_1}, \qquad |f_\alpha, L_{1\alpha}, M_{0\alpha}| = -m\Sigma f_1 a_2 a_3,$$

$$|f_\alpha, L_{1\alpha}, M_{1\alpha}| = m\Sigma f_1(a_2 b_3 + a_3 b_2) + \mu_1 \sum \frac{f_1}{m_1},$$

$$|f_\alpha, L_{1\alpha}, M_{2\alpha}| = -m\Sigma f_1 b_2 b_3 - \mu_0 \sum \frac{f_1}{m_1}.$$

Ferner ist noch

$$0 = \sum_\alpha \frac{A_\alpha}{m_\alpha} = \sum_\alpha \frac{M_{0\alpha}}{m_\alpha} = \sum_\alpha \frac{M_{1\alpha}}{m_\alpha} = \sum_\alpha \frac{M_{2\alpha}}{m_\alpha},$$

$$0 = \sum_\alpha \mu_\alpha M_{\alpha\beta} = \sum_\alpha \mu_\alpha M_\alpha .$$

$$4M_{01}M_{21} - M_{11}M_{11} = -\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)^2. \quad \text{etc.}$$

$$4(M_{02}M_{23} + M_{03}M_{22}) - 2M_{12}M_{13} = -2\left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1}\right)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + 4m, \text{ etc.}$$

$$4M_0M_2 - M_1M_1 = 4mD - D'D'.$$

Die letzte Relation lehrt, dass der Ausdruck H_1, als Function von q, r_1, r_2, r_3 betrachtet, irreductibel ist. Setzen wir endlich noch an

$$\sum B_1 r_1 = k\sum r_1(a_1 - b_1 q)\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right)$$

$$= kL_1 - kqM_2,$$

$$U = \sum \frac{m_2 m_3}{q_1},$$

$$H_2 = L_2 + kL_1 - kqM_2 - U,$$

so ist der zur Bildung der Differentialgleichungen erforderliche Ausdruck H' gegeben durch

$$H' = pH_1 + H_2.$$

Die mit H' gebildeten Bewegungsgleichungen wollen wir kurz als das System achter Ordnung bezeichnen. Der Ausdruck H' ist die Differenz »lebendige Kraft minus Kräftefunction«. Bezeichnet man den constanten Werth dieser Differenz wie früher mit $-h$ und setzt

$$K = (H_2 + h) : H_1 ,$$

so erhält man das von p und t freie »System sechster Ordnung«

$$\frac{dq_\alpha}{dq} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}.$$

Fügt man hierzu die Gleichung

$$\frac{dt}{dq} = 1 : H_1 ,$$

so erhält man das »System siebenter Ordnung«, welches sich aus dem 8. Ordnung dadurch ergiebt, dass man mittelst des Integrals der lebendigen Kraft die Variable p fortschafft und q an Stelle von t als unabhängige Variable einführt. Umgekehrt kann man von dem System 7. Ordnung zu dem 8. Ordnung dadurch gelangen, dass man an Stelle der Constante h die Variable p durch die Gleichung

$$pH_1 + H_2 + h = 0$$

einführt.

19. Die in H' und K auftretenden Constanten a, b konnten innerhalb der oben erwähnten Einschränkungen völlig beliebig gewählt werden, und man hätte z. B. ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen das specielle Werthsystem

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -1$$
$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = -1$$

zu Grunde legen können. Der Symmetrie halber wollen wir jedoch die a, b unbestimmt lassen, und zeigen, wie sich die für zwei verschiedene Werthsysteme der a, b geltenden Differentialgleichungen in einander überführen lassen. Es seien a, b, c, d vier willkürliche, nur der Einschränkung

$$ad - bc = 1$$

unterworfene Constanten. Man setze an

$$a_\alpha = aa'_\alpha + bb'_\alpha , \qquad b_\alpha = ca'_\alpha + db'_\alpha ,$$

dann ist

$$a'_2 b'_3 - a'_3 b'_2 = 1 , \quad \text{etc.},$$

d. h. die a', b' genügen denselben Bedingungen wie die ursprünglichen a, b. Ferner sei

$$q = \frac{aq' + b}{cq' + d} .$$

wo q' eine neue anstatt q in das System 7. Ordnung einzuführende unabhängige Variable bedeutet; dann ist

$$a_\alpha - b_\alpha q = (a'_\alpha - b'_\alpha q'):(cq' + d),$$

$$(cq' + d)^2 H_1 = \sum r_1(a'_1 - b'_1 q')\Big(\frac{a'_2 - b'_2 q'}{m_2} - \frac{a'_3 - b'_3 q'}{m_3}\Big) = H'_1.$$

$$\sum B_1 r_1 - kc(cq' + d)H_1 = k\sum r_1(a'_1 - b'_1 q')\Big(\frac{b'_2}{m_2} - \frac{b'_3}{m_3}\Big).$$

Schreibt man also in K anstatt q und anstatt der a, b resp. q' und a', b', so erhält man für den so entstehenden Ausdruck K' die Relationen

$$K' = \frac{K}{(cq' + d)^2} - \frac{kc}{cq' + d},$$

$$K = K'(cq' + d)^2 + kc(cq' + d).$$

Beachtet man nun noch die Gleichung

$$dq = dq' : (cq' + d)^2,$$

so erkennt man leicht, dass das System 7. Ordnung nach Einführung von q' die Form

$$\frac{dq_\alpha}{dq'} = \frac{\partial K'}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dq'} = -\frac{\partial K'}{\partial q_\alpha}, \qquad \frac{dt}{dq'} = 1 : H'_1$$

annimmt.

Von den acht Variablen p, q besitzen drei, nämlich q_1, q_2, q_3, eine einfache geometrische Bedeutung, indem sie die gegenseitigen Distanzen der drei Körper darstellen. Wir wollen nun auch für die übrigen Variablen den Zusammenhang mit den ursprünglichen Bestimmungsstücken, nämlich den Coordinaten und Geschwindigkeiten aufsuchen. Es seien X, Y, Z und X', Y', Z' die auf den Schwerpunkt und auf ein beliebig gerichtetes Axensystem bezogenen Coordinaten und Geschwindigkeiten, ferner x, y, z und x', y', z' die analogen Grössen, wenn die invariable

Ebene als xy-Ebene gewählt wird. Bedeuten k_1, k_2, k_3 die constanten Werthe der drei Flächensätze für das erste Axensystem, so ist

$$k_1 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} Y_\alpha & Y'_\alpha \\ Z_\alpha & Z'_\alpha \end{vmatrix}, \qquad k_2 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} Z_\alpha & Z'_\alpha \\ X_\alpha & X'_\alpha \end{vmatrix}, \qquad k_3 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} X_\alpha & X'_\alpha \\ Y_\alpha & Y'_\alpha \end{vmatrix},$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2 = 0.$$

Die x, y, z hängen mit den X, Y, Z durch eine orthogonale Substitution der Form

$$x = a\,X + b\,Y + c\,Z,$$

$$y = a'X + b'Y + c'Z,$$

$$z = a''X + b''Y + c''Z.$$

zusammen, für welche die Relation

$$1 : a'' : b'' : c'' = ik : k_1 : k_2 : k_3$$

gilt. Nun war

$$q = \sum_\alpha a_\alpha(x_\alpha + iy_\alpha) : \sum_\alpha b_\alpha(x_\alpha + iy_\alpha);$$

andererseits ist

$$x + iy = X(a + ia') + Y(b + ib') + Z(c + ic'),$$

$$k^2(a - ia')(x + iy) = X(k^2 + k_1^2) + Y(k_1k_2 + kk_3) + Z(k_1k_3 - kk_2),$$

folglich

$$q = q_{01} : q_{02},$$

wenn

$$q_{01} = \sum_\alpha a_\alpha\{X_\alpha(k^2 + k_1^2) + Y_\alpha(k_1k_2 + kk_3) + Z_\alpha(k_1k_3 - kk_2)\},$$

$$q_{02} = \sum_\alpha b_\alpha\{X_\alpha(k^2 + k_1^2) + Y_\alpha(k_1k_2 + kk_3) + Z_\alpha(k_1k_3 - kk_2)\}$$

gesetzt wird. Hiermit ist offenbar der gesuchte Zusammenhang für q gegeben.

Um den analogen Zusammenhang für die p nachzuweisen, benutzen wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dq}{dt} = H_1 - \sum A_1 r_1 .$$

$$\frac{ds_1}{dt} = C'\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) + D's_1 - C(r_2 + r_3) + A_1 p + B_1 .$$

. . . .

deren Auflösung nach den r und nach p die gesuchten Beziehungen liefert. Zur Abkürzung setzen wir

$$s'_\alpha = \sum s_1 - 2s_\alpha, \qquad s'_2 + s'_3 = 2s_1, \quad \text{etc.},$$

$$A'_\alpha = \sum A_1 - 2A_\alpha, \qquad A'_2 + A'_3 = 2A_1, \quad \text{etc.},$$

$$B'_\alpha = \sum B_1 - 2B_\alpha, \qquad B'_2 + B'_3 = 2B_1, \quad \text{etc.},$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum s_1 s'_1 \\ &= 2\sum s_2 s_3 - \sum s_1^2 \\ &= \sum s'_2 s'_2 .\end{aligned}$$

Δ ist offenbar das 4-fache Quadrat des von den drei Körpern gebildeten Dreiecks. Weiter sei

$$T_1 = \sum A_1 s'_1 = \sum A'_1 s_1 ,$$

$$T_2 = \sum B_1 s'_1 = \sum B'_1 s_1 ,$$

$$V_1 = \sum A_1 A'_1 ,$$

$$V_2 = \sum A_1 B'_1 = \sum A'_1 B_1 ,$$

$$\begin{aligned}W_1 &= \sum A_1 s'_1 . \sum A'_1 s_1 - \Delta \sum A_1 A'_1 \\ &= T_1^2 - \Delta V_1 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_2 &= \sum A_1 s'_1 . \sum B_1 s'_1 - \Delta \sum A_1 B'_1 \\ &= T_1 T_2 - \Delta V_2 ,\end{aligned}$$

dann wird

$$\frac{d\Delta}{dt} = 2\sum s_1' \frac{ds_1}{dt}$$

$$= 2\Delta D' + pT_1 + 2T_2,$$

$$\frac{dC}{dt} = m(2C' + k),$$

$$\frac{ds_1'}{dt} = \frac{2C'}{m_1} + D's_1' - 2Cr_1 + A_1'p + B_1',$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum A_1 \frac{ds_1'}{dt} = D'T_1 - 2C\frac{dq}{dt} + pV_1 + V_2,$$

$$T_1\frac{d\Delta}{dt} - 2\Delta\sum A_1 \frac{ds_1'}{dt} = 4C\Delta\frac{dq}{dt} + 2pW_1 + 2W_2,$$

$$\frac{2\Delta}{mm_1}\frac{dC}{dt} + s_1'\frac{d\Delta}{dt} - 2\Delta\frac{ds_1'}{dt}$$

$$= \frac{2\Delta k}{m_1} + 4C\Delta r_1 + 2p(s_1'T_1 - \Delta A_1') + 2(s_1'T_2 - \Delta B_1').$$

Hiernach sind p und p_α linear durch die Ableitungen der q, q_α ausgedrückt; die Coefficienten in diesen linearen Ausdrücken besitzen den gemeinsamen Nenner

$$C\Delta W_1.$$

Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Grössen

$$q, q_\alpha, p, p_\alpha, k, k_\alpha, h,$$

wenn sie durch die ursprünglichen Variablen $X, X', \ldots$ ausgedrückt werden, homogen im Sinne des § 4 sind. Infolge dessen bleiben die drei reducirten Systeme von Differentialgleichungen, nämlich das System 6., 7., 8. Ordnung, ungeändert, wenn jede darin vorkommende Grösse mit der ihrer Dimension entsprechenden Potenz eines constanten Proportionalitäts-Factors multiplicirt wird.

20. Als nächste Aufgabe behandeln wir die Aufsuchung der zu dem System 7. Ordnung gehörigen Integralgleichungen von der Form

$$\mathfrak{G}(t, q, q_\alpha, p_\alpha).$$

Dass wenigstens eine solche Integralgleichung, nämlich die Bedingung für die Bewegung der drei Körper in einer Ebene, vorhanden ist, lässt sich von vornherein unschwer durch geometrische Überlegungen zeigen; es kommt jedoch wesentlich darauf an nachzuweisen, dass nur diese eine existirt. Es sei φ eine irreductible ganze Function der acht Variablen t, q, q_α, p_α; schreibt man

$$q_4 = q_1 q_2 q_3, \qquad K = \frac{q_4 H_2 + q_4 h}{q_4 H_1},$$

so sind in K Zähler und Nenner von der Form $\mathfrak{G}(p, q)$ und man erkennt, dass der Ausdruck

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{\partial\varphi}{\partial q} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial K}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{1}{H_1}$$

durch Multiplication mit $(q_4 H_1)^2$ ebenfalls die Gestalt $\mathfrak{G}(p, q)$ annimmt. Wenn also φ eine Integralgleichung ist, so muss

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log\varphi}{dq} = \omega, \qquad \omega = \mathfrak{G}(t, p, q)$$

sein. Wenn t in φ wirklich vorkommt, so können wir schreiben

$$\varphi = P_0 t^\nu + P_1 t^{\nu-1} + \ldots + P_\nu,$$

wo ν mindestens gleich Eins ist. Bildet man, indem für den Augenblick t als unabhängige Variable genommen wird, die vollständige Ableitung von φ nach t, so ist diese nach t höchstens vom Grade ν, d. h. die logarithmische Ableitung frei von t. Hieraus ergeben sich, wenn

$$\frac{d\log\varphi}{dt} = \omega'$$

gesetzt wird, die Bedingungen

$$\frac{dP_0}{dt} = \omega' P_0, \qquad \nu P_0 + \frac{dP_1}{dt} = \omega' P_1,$$

also

$$\nu + \frac{d}{dt}\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = 0,$$

d. h. es wäre

$$\nu t + \frac{P_1}{P_0}$$

ein Integral des Systems 7. Ordnung. Da ein Integral dieser Form für die relativen Bewegungen der drei Körper, wie wir wissen, nicht existirt, so schliessen wir, dass t in φ nicht vorkommt.

Durch die bereits mehrfach benutzte Betrachtungsweise zeigt man ferner, dass die Coefficienten in φ sich allemal darstellen lassen müssen als algebraische Functionen der in den Differentialgleichungen auftretenden Constanten m, a, b, h, k und eventuell gewisser, ausserdem noch auftretender constanter Parameter. Mit Rücksicht hierauf denken wir uns die Coefficienten in φ dargestellt als rationale Functionen jener Constanten und einer algebraisch von denselben abhängenden Irrationalität Γ, welche als Wurzel einer gewissen irreductiblen Gleichung definirt ist. Die Bedingung

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log \varphi}{dq} = \omega$$

gilt dann für alle Wurzelwerthe Γ. Bilden wir jetzt die Summe über die den einzelnen Γ entsprechenden Bedingungen, so erhalten wir

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log \Phi}{dq} = \Omega, \tag{32}$$

wo Φ das Product der einzelnen φ und Ω die Summe der einzelnen ω bedeutet. Die Φ und Ω sind dann von der Irrationalität Γ frei und wir können uns auf die Aufsuchung der Integralgleichungen von der Form Φ beschränken, da man von Φ rückwärts durch Zerlegung in Factoren zu den φ gelangt. Die Hinzufügung oder Unterdrückung constanter Factoren ist auf das Bestehen der Bedingung (32) offenbar ohne Einfluss; wir dürfen deshalb φ als eine ganze Function nicht bloss der Variablen p, q, sondern auch der Constanten m, a, b, h, k und der etwa auftretenden constanten Parameter $c_1, c_2, \ldots$ voraussetzen und ferner annehmen, dass Φ keine von den Variablen p, q freien Theiler der Form

$$\mathfrak{G}(m, a, b, h, k, c_1, c_2, \ldots)$$

besitze. Der Ausdruck Ω ist dann sicher von der Form

$$\mathfrak{G}(p, q, h, k, c_1, c_2, \ldots).$$

Wir wollen nun zunächst zeigen, dass Φ parameterfrei ist. Wenn

nämlich Φ einen Parameter — sagen wir c — enthält, so denken wir uns Φ nach c geordnet und

$$\Phi = \Phi_0 c^\nu + \Phi_1 c^{\nu-1} + \ldots + \Phi_\nu$$

geschrieben. Da Ω in c vom Grade Null ist, so erhalten wir

$$\Omega(q_4 H_1)^{-2} = \frac{d \log \Phi_0}{dq} = \frac{d \log \Phi_1}{dq} = \ldots,$$

d. h. der Quotient zweier Φ_α ist ein rational aus den p, q gebildetes Integral des Systems 7. Ordnung, reducirt sich also, da solche Integrale nicht existiren, auf eine Constante. Infolge dessen könnte ein Parameter c in Φ nur in einem von den Variablen p, q freien Theiler enthalten sein. Da solche Theiler von vornherein unterdrückt werden sollten, so ist Φ parameterfrei und deswegen auch homogen in den Dimensionen.

Der Ausdruck Φ kann den Theiler $q_4 H_1$ enthalten. Führen wir, wenn u, v zwei Functionen der Variablen p, q bedeuten, das bekannte Operationssymbol

$$(u, v) = \sum \left(\frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{\partial v}{\partial p_1} - \frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} \right)$$

ein, so wird

$$\frac{d \log (q_4 H_1)}{dq} = \frac{\partial \log (q_4 H_1)}{\partial q} + \left(\log q_4 H_1 , \frac{q_4 H_2 + q_4 h}{q_4 H_1} \right),$$

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log (q_4 H_1)}{dq} = q_4 H_1 \frac{\partial (q_4 H_1)}{\partial q} + (q_4 H_1 , q_4 H_2 + q_4 h).$$

Hiernach können wir uns in Φ den etwa vorkommenden Theiler $q_4 H_1$ unterdrückt denken, ohne dass dadurch an der Bedingung (32) etwas Wesentliches geändert wird. Dies festgesetzt führen wir jetzt in Φ und Ω anstatt h die Variable p durch die Gleichung

$$h = -pH_1 - H_2$$

ein. Beide Ausdrücke bleiben dabei in Bezug auf q, p, p_α ganz rational, können dagegen in Bezug auf die q_α Nenner enthalten, welche jedoch nur Potenzen der q_α als Theiler besitzen. Gehen wir, entsprechend der gemachten Substitution, von dem System 7. Ordnung auf das 8. Ord-

nung über und führen t als unabhängige Variable ein, so können wir schreiben

$$\frac{d \log \Phi}{dt} = \Omega : (q_4^2 H_1) = \Omega',$$

wo Ω', da Φ nicht den Theiler $q_4 H_1$ besitzt, im Nenner sicher nur Potenzen der q_α als Theiler enthält. Führen wir weiter für die p ihre in § 19 gegebenen linearen Ausdrücke durch die

$$\frac{dq}{dt}, \frac{ds_\alpha}{dt}$$

ein, so werden Φ und Ω' ganze Functionen dieser Ableitungen und enthalten in den Nennern als Theiler nur Potenzen von q_α, C, Δ und W_2. Führt man endlich statt der $q, \ldots$ ihre Ausdrücke durch die rechtwinkligen, auf den Schwerpunkt und ein willkürlich gerichtetes Axensystem bezogenen Coordinaten und Geschwindigkeiten $X, X', \ldots$ ein, und denkt sich auch die in q vorkommenden Grössen k_1, k_2, k_3, sowie die durch die Gleichung

$$\sum k_1^2 + k^2 = 0$$

bestimmte Quadratwurzel k durch die $X, X', \ldots$ ausgedrückt, so wird Φ eine Integralgleichung der ursprünglichen Bewegungsgleichungen, welche die Form

$$\Re(X, \ldots, X', \ldots, q_\alpha, k)$$

besitzt, im Nenner jedoch die Geschwindigkeiten nur in den vier Verbindungen k_α, k enthält. Das Gleiche gilt von der Form des Ausdruckes Ω'.

Es werde jetzt mit Φ_1 das Product derjenigen Theiler im Zähler von Φ bezeichnet, welche sich, als Functionen der $X', \ldots$ betrachtet, nicht durch die k_α, k allein ausdrücken lassen, und es sei

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2, \qquad \frac{d \log \Phi_1}{dt} = \Omega_1, \qquad \frac{d \log \Phi_2}{dt} = \Omega_2,$$

dann ist Ω_2 genau von derselben Form wie Ω' und dasselbe gilt wegen

$$\Omega_1 = \Omega' - \Omega_2$$

auch von Ω_1. Weiter erkennt man, dass wegen der über Φ_1 gemachten Festsetzungen Ω_1 in Wirklichkeit im Nenner nur Potenzen der q_α als

Theiler enthalten kann; Φ_1 ist also, wenn es sich nicht etwa auf eine Constante reducirt, eine Integralgleichung für die Bewegung relativ um den Schwerpunkt. Schreibt man mit Rücksicht auf die Irrationalität k

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + k\Phi_{12},$$

$$\Omega_1 = \Omega_{11} + k\Omega_{12},$$

$$\Phi_{11} \quad \text{und} \quad \Phi_{12} = \mathfrak{P}(X, X', \ldots, q_a),$$

$$q_4^3\Omega_{11} \quad \text{und} \quad q_4^3\Omega_{12} = \mathfrak{P}(X, X', \ldots, q_a),$$

so ist, da die Bedingung

$$\frac{d\log}{dt}(\Phi_{11} + k\Phi_{12}) = \Omega_{11} + k\Omega_{12}$$

für beide Vorzeichen von k gilt,

$$\frac{d\log}{dt}(\Phi_{11}^2 - k^2\Phi_{12}^2) = 2\Omega_{11}.$$

Das Product

$$(33) \qquad (\Phi_{11} + k\Phi_{12})(\Phi_{11} - k\Phi_{12})$$

ist also eine homogene Integralgleichung von der früher behandelten Art und ist deshalb, da es sich hier nur um die relative Bewegung handelt, in der Form

$$\mathfrak{P}(X, Y, Z, q_a)\mathfrak{P}(k_1, k_2, k_3, h)$$

darstellbar. Eliminirt man also in dem Producte (33) mittelst der Gleichungen

$$0 = \Sigma m_1 X_1' = \Sigma m_1 Y_1' = \Sigma m_1 Z_1'$$

und der Ausdrücke für die k_a, k sieben von den neun Grössen X', Y', Z', so müssen die beiden anderen von selbst mit herausfallen; dies ist aber nicht anders möglich, als wenn jeder der beiden Factoren jenes Productes einzeln durch die angegebene Elimination von sämmtlichen X', Y', Z' gleichzeitig befreit wird. Hiernach kann also die gesuchte Integralgleichung Φ, wenn man wieder auf die Variabeln des Systems 7. Ordnung zurückgeht, nur die vier Variabeln q enthalten oder muss m. a. W. frei von den p_a sein.

21. Unsere Aufgabe ist jetzt darauf zurückgeführt, eine von den p_α freie Lösung Φ der Form $\mathfrak{G}(q, q_\alpha)$ zu der Bedingung

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log \Phi}{dq} = \Omega, \qquad \Omega = \mathfrak{G}(q, q_\alpha, p_\alpha)$$

zu suchen. Zunächst ist

$$\Omega = (q_4 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + (q_4 H_1)^2 \left(\log \Phi, \frac{H_2 + h}{H_1}\right)$$

$$= (q_4 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + q_4^2 H_1 (\log \Phi, H_2 + h) - q_4^2 (H_2 + h)(\log \Phi, H_1).$$

Diese Gleichung zeigt, dass Ω in den p_α höchstens vom zweiten und in den q_α höchstens vom vierten Grade ist. Wir spalten Ω nach der Ordnung der einzelnen Glieder in Bezug auf die p_α in die drei Bestandtheile

$$\Omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2,$$

wo der Index die Ordnung nach den p angiebt, und führen statt der p_α die r_α durch die Relationen

$$p_\alpha = r_\alpha q_\alpha$$

ein. Hiermit werden ω_1 und ω_2 nach den q_α höchstens vom 5^{ten}, resp. 6^{ten} Grade. Weiter wird, wenn man entwickelt,

$$\omega_0 = q_4^2 (U - h)(\log \Phi, H_1),$$

$$\omega_1 = k q_4^2 H_1 (\log \Phi, L_1 - q M_2) - k q_4^2 (L_1 - q M_2)(\log \Phi, H_1),$$

$$\omega_2 = (q_4 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + q_4^2 H_1 (\log \Phi, L_2) - q_4^2 L_2 (\log \Phi, H_1),$$

wobei zu beachten ist, dass das Symbol (u, v) auch in der Form

$$\sum \left(\frac{\partial u}{\partial s_1} \frac{\partial v}{\partial r_1} - \frac{\partial v}{\partial s_1} \frac{\partial u}{\partial r_1}\right)$$

geschrieben werden kann. Bei der Integration der drei Bedingungen für Φ wollen wir der besseren Übersicht halber folgende Abkürzungen und Relationen benutzen:

$$E = \sum a_2 a_3 s_1, \qquad F = -\sum (a_2 b_3 + a_3 b_2) s_1, \qquad G = \sum b_2 b_3 s_1,$$

$$C + \mu_0 E + \mu_1 F + \mu_2 G = 0.$$

$$\begin{array}{llll}
(C, M_0) = 0, & (E, M_0) = \quad 0, & (F, M_0) = \quad \mu_2, & (G, M_0) = -\mu_1, \\
(C, M_1) = 0, & (E, M_1) = -\mu_2, & (F, M_1) = \quad 0, & (G, M_1) = \quad \mu_0. \\
(C, M_2) = 0, & (E, M_2) = \quad \mu_1, & (F, M_2) = -\mu_0, & (G, M_2) = \quad 0, \\
(C, H_1) = 0, & (E, H_1) = -\mu_2 q + \mu_1 q^2, & (F, H_1) = \quad \mu_2 - \mu_0 q^2, & (G, H_1) = -\mu_1 + \mu_0 q; \\
(C, L_1) = m, & (E, L_1) = \quad 0, & (F, L_1) = \quad \mu_1, & (G, L_1) = -\mu_0,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(C, L_2) &= 2mC''. \\
(E, L_2) &= -\mu_2 C' + ED' + C\sum a_1 a_1 r_1, \\
(F, L_2) &= \quad 2\mu_1 C' + FD' - 2C\sum a_1 b_1 r_1, \\
(G, L_2) &= -\mu_0 C' + GD' + C\sum b_1 b_1 r_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= E + Fq + Gq^2 \\
&= \sum s_1 (a_2 - b_2 q)(a_3 - b_3 q),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Q, M_0) &= \quad \mu_2 q - \mu_1 q^2, \\
(Q, M_1) &= -\mu_2 \quad + \mu_0 q^2, \\
(Q, M_2) &= \quad \mu_1 \quad - \mu_0 q, \\
(Q, H_1) &= \quad 0, \\
(Q, L_1) &= \quad \mu_1 q - \mu_0 q^2.
\end{aligned}$$

$$(Q, L_1 - qM_2) = 0.$$

$$\begin{aligned}
(Q, L_2) &= QD' + \sum (a_1 - b_1 q)^2 \left(Cr_1 - \frac{C'}{m_1} \right) \\
&= QD' + Q\frac{\partial H_1}{\partial q} - H_1 \frac{\partial Q}{\partial q}.
\end{aligned}$$

Die erste von den drei Bedingungen für Φ nimmt mit der Abkürzung

$$q_1(U - h) = V, \qquad V = \quad (q_a)$$

die Gestalt

$$\omega_0 = q_4 V(\log \Phi, H_1) = V \sum A_1 q_2 q_3 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q_1}$$

an. Da Φ möglicherweise durch V theilbar ist, so setzen wir an

$$\Phi = \Psi . V^\rho, \qquad \Psi = \mathfrak{G}(q, q_\alpha),$$

mit dem Zusatze, dass Ψ nicht durch V theilbar sein soll. Wir erhalten dann

$$q_4(\log \Psi, H_1) = \frac{\omega_0 - \rho q_4(V, H_1)}{V}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann, entwickelt, im Nenner nicht den Theiler V enthalten, folglich ist der Zähler der rechten Seite durch V theilbar, also die rechte Seite in den q_α höchstens vom ersten Grade, so dass wir ansetzen dürfen

$$q_4(\log \Psi, H_1) = \omega_{00} + \sum_\alpha \omega_{0\alpha} q_\alpha,$$

wo die Coefficienten rechts nur noch von q abhängen. Führt man in diese partielle Differentialgleichung an Stelle der q_α die Variablen q_1, C und Q ein, so wird

$$A_1 q_2 q_3 \frac{\partial \log \Psi}{\partial q_1} = \omega_{00} + \sum_\alpha \omega_{0\alpha} q_\alpha,$$

$$A_1 \log \Psi = \omega_{00} \int \frac{dq_1}{q_2 q_3} + \sum_\alpha \omega_{0\alpha} \int \frac{q_\alpha dq_1}{q_2 q_3},$$

wo bei den Quadraturen q_2 und q_3 durch q_1, C, Q ausgedrückt zu denken sind. Die erste Quadratur führt auf elliptische Integrale, welche in $\log \Psi$ nicht vorkommen dürfen, d. h. es ist ω_{00} gleich Null. Die drei anderen Quadraturen führen auf Logarithmen und lassen sich, wie leicht verificirt werden kann, in der Form

$$A_1 \sigma_1 \log\left(\frac{q_2}{\sqrt{A_2}} + \frac{q_3}{\sqrt{A_3}}\right), \qquad A_1 \sigma_2 \log\left(\frac{q_3}{\sqrt{A_3}} + \frac{q_1}{\sqrt{A_1}}\right),$$

$$A_1 \sigma_3 \log\left(\frac{q_1}{\sqrt{A_1}} + \frac{q_2}{\sqrt{A_2}}\right)$$

schreiben, wo die σ wegen der Beschaffenheit von Ψ nothwendiger Weise ganze Zahlen sind. Setzt man nun

$$\log \Psi = \sum \sigma_1 \log\left(\frac{q_2}{\sqrt{A_2}} + \frac{q_3}{\sqrt{A_3}}\right) + f(q, C, Q),$$

so ergiebt die Substitution in die Differentialgleichung die Relationen

$$\omega_{0\alpha} = \sqrt{A_1 A_2 A_3} \cdot \frac{\sigma_\alpha}{\sqrt{A_\alpha}},$$

d. h. entgegen den für ω bestehenden Voraussetzungen irrationale Ausdrücke. Die σ und $\omega_{0\alpha}$ müssen deshalb verschwinden und es ist Ψ als Function der drei Grössen q, C, Q allein darstellbar. Setzt man nun in dem ursprünglichen Ausdrucke für Ψ an Stelle von q_2 und q_3 ihre Ausdrücke durch q_1, C, Q, so muss q_1 von selbst herausfallen; entwickelt man andererseits q_2, q_3 und dann Ψ nach fallenden Potenzen von q_1, so erkennt man, dass Ψ die Gestalt $\mathfrak{G}(C, Q)$ besitzt, also in der ursprünglichen Gestalt nur die Quadrate der q_α enthielt. Mit Rücksicht hierauf kann man zunächst schreiben

$$\Psi = \mathfrak{G}(q, E, F, G).$$

Eliminirt man hieraus abwechselnd eines der drei Paare FG, GE, EF mittelst der drei Gleichungen

$$\begin{aligned} E\mu_0 + F\mu_1 + G\mu_2 &= -C, \\ E \quad + Fq \quad + Gq^2 &= \quad Q, \end{aligned}$$

so muss die dritte Grösse E oder F oder G jedesmal von selbst mit herausfallen. Als Nenner können bei den drei so entstehenden Formen für Ψ nur Potenzen von

$$\mu_1 q^2 - \mu_2 q, \qquad \mu_2 - \mu_0 q^2, \qquad \mu_0 q - \mu_1$$

auftreten. Diese Nenner müssen jedoch, da sie keine gemeinsamen Theiler besitzen, sich in Wirklichkeit jedesmal fortheben, d. h. es ist

$$\Psi = \mathfrak{G}(q, C, Q), \qquad \Phi = \Psi \cdot V^\rho.$$

22. Mit dem gefundenen Ausdrucke für Ψ gehen wir jetzt in die zweite der aufgestellten Bedingungen ein und erhalten zunächst

$$\omega_1 = \frac{k\rho q_1^2}{V}\{H_1(V, L_1 - qM_2) - (L_1 - qM_2)(V, H_1)\}$$

$$+ k_1^2\{H_1(\log\Psi, L_1 - qM_2) - (L_1 - qM_2)(\log\Psi, H_1)\}.$$

Die erste, V enthaltende Klammer $\{\}$ ist nicht durch V theilbar, wie man

schon durch Betrachtung der Glieder erkennt, welche die in V vorkommende Grösse h enthalten. Da andererseits die übrigen Glieder der Differentialgleichung V nicht im Nenner enthalten können, so muss die genannte Klammergrösse in Wirklichkeit fehlen, d. h. ρ gleich Null sein, also

$$\Psi = \Phi .$$

Hiermit geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{\omega_1}{kq_4^2 H_1} = \frac{\partial \log \Phi}{\partial C}(C, L_1 - qM_2) + \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}(Q, L_1 - qM_2)$$
$$= m\frac{\partial \log \Phi}{\partial C}.$$

Die linke Seite muss von q_1 unabhängig werden, sobald man für q_2 und q_3 ihre Ausdrücke durch q_1, C, Q einführt. Entwickelt man nun wie vorhin wieder nach fallenden Potenzen von q_1, so kann, da ω_1 nach den q_α höchstens vom fünften Grade ist, überhaupt kein von q_1 freies Glied auftreten, d. h. es wird

$$0 = \frac{\partial \log \Phi}{\partial C}, \qquad \Phi = \mathfrak{G}(q, Q).$$

Hiermit gehen wir jetzt in die dritte Differentialgleichung ein, wobei zu beachten ist, dass in Φ q theils explicite, theils implicite, nämlich in Q, vorkommt, und schreiben demgemäss

$$\omega_2 = (q_4 H_1)^2 \left\{ \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}\frac{\partial F}{\partial q} \right\} + q_4^2 H_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}(Q, L_2)$$
$$= (q_4 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + q_4^2 H_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}\left\{ D' + \frac{\partial H_1}{\partial q} \right\} Q.$$

Der Quotient $\omega_2 : q_4^2$ muss, wenn wieder die q_1, C, Q eingeführt werden, von q_1 frei werden. Entwickelt man nach fallenden Potenzen von q_1, so wird, wie man erkennt, das von q_1 freie Glied auch frei von C und Q, d. h. der Quotient ist nur von q und den r_α abhängig. Andererseits ist ω_2 durch H_1 theilbar, wir dürfen also schreiben

$$\omega_2 = q_4^2 H_1 \sum \omega_{2\alpha} r_\alpha, \qquad \omega_{2\alpha} = \mathfrak{G}(q),$$

$$\sum_\alpha \omega_{2\alpha} r_\alpha = H_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q}\left(D' + \frac{\partial H_1}{\partial q} \right).$$

Diese Gleichung zerfällt sofort in die drei andern

$$\omega_{21} = A_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{dA_1}{dq}\right),$$

. . . .

aus denen wir

$$\omega_{22} A_3 - \omega_{23} A_2 = \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q} \begin{vmatrix} \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1} + \frac{dA_2}{dq}, & A_2 \\ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{dA_3}{dq}, & A_3 \end{vmatrix}$$

. . . .

bilden. Hiernach besteht Φ aus einer Potenz von Q, multiplicirt mit einer Function von q allein. Setzen wir demgemäss

$$\Phi = WQ^\rho, \qquad W = \mathfrak{G}(q),$$

so wird

$$\omega_{21} = A_1 \frac{\partial \log W}{\partial q} + \rho\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{dA_1}{dq}\right).$$

. . . .

Denkt man sich W nach q in Linearfactoren zerlegt, so muss jeder derselben, da die A_α und $\omega_{2\alpha}$ die Form $\mathfrak{G}(q)$ besitzen, Theiler von A_1, A_2, A_3 sein. Da nun die A_α keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so reducirt sich W auf eine Constante und es wird

$$\Phi = Q^\rho.$$

Fassen wir die bisherige Untersuchung zusammen und beachten, dass Q irreductibel ist, so gelangen wir zu dem Resultat, dass die Bedingung

$$(q_1 H_1)^2 \frac{d \log \varphi}{dq} = \omega, \qquad \omega = \mathfrak{G}(q\,, q_\alpha\,, p_\alpha),$$

nur die beiden irreductiblen Lösungen

$$\varphi = q_1 H_1\,, \qquad \varphi = Q$$

zulässt. Von diesen liefert nur Q eine wirkliche Integralgleichung, entsprechend der Relation

$$\frac{dQ}{dt} = Q\left(D' + \frac{\partial H_1}{\partial q}\right).$$

während $q_4 H_1$ nur als Integralgleichung erscheint, wenn q als unabhängige Variable gewählt wird, wie aus der Relation

$$\frac{d(q_4 H_1)}{dt} = H_1 \frac{\partial(q_4 H_1)}{\partial q} + \frac{1}{q_4}(q_4 H_1, q_4 H_2 + q_4 h)$$

hervorgeht, deren rechte Seite, wie man sich leicht überzeugt, nicht durch H_1 theilbar ist.

Die geometrische Bedeutung des Verschwindens von Q lässt sich leicht angeben. Aus der Form des Ausdruckes für q durch die auf die invariable Ebene bezogenen Coordinaten x, y folgt nämlich, dass q sich algebraisch durch die Seiten des Dreiecks ausdrücken lässt, welches die Projectionen der drei Körper auf die invariable Ebene mit einander bilden. Bewegen sich nun die drei Körper in einer Ebene, d. h. also in der invariablen Ebene des Systems, so fallen die drei Seiten des genannten Dreiecks mit den q_a zusammen, und man erhält durch Rationalmachen der so zwischen den q, q_a entstehenden Gleichung genau die Bedingung $Q = 0$. Dieselbe besagt also, dass die drei Körper sich in einer Ebene bewegen.

23. Am Schlusse der ersten Abtheilung war als nächster Schritt in dem hier bei der Untersuchung über die Integrale des Vielkörper-Problems befolgten Gedankengange die Beantwortung der Frage bezeichnet worden, ob Integrale existiren, welche durch Quadratur über algebraische Ausdrücke gebildet sind. Wir fragen also jetzt, indem wir wieder das System 7. Ordnung zu Grunde legen, ob ein Integral der Form

$$\varphi = \int \Big[\vartheta(t)dt + \vartheta(q)dq + \sum_a \vartheta(q_a)dq_a + \sum_a \vartheta(p_a)dp_a\Big]$$

existirt, in welchem der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein totales Differential und die $\vartheta(t), \vartheta(q), \ldots$ algebraische Functionen der acht Variablen $t, q, \ldots$ sind. Ausdrücke dieser Art können wir füglich als Abel'sche Quadraturen und, wenn sie ein Integral unserer Differentialgleichungen liefern, als Abel'sche Integrale des vorgelegten Problems bezeichnen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Quadratur ein Integral liefert, ist mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\frac{1}{H_1} = \frac{\partial K}{\partial h}$$

durch das identische Verschwinden des Ausdruckes

$$\vartheta(q) + \vartheta(t)\frac{\partial K}{\partial h} + \sum_\alpha \left(\vartheta(q_\alpha)\frac{\partial K}{\partial p_\alpha} - \vartheta(p_\alpha)\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}\right)$$

gegeben.

Die $\vartheta(t), \ldots$ denken wir uns dargestellt als rationale Functionen der Variablen und einer einzigen, durch eine irreductible Gleichung definirten Irrationalität γ. Weiter denken wir uns in den $\vartheta(t), \ldots$ die Irrationalität aus den Nennern fortgeschafft und die Zähler nach γ auf den niedrigsten Grad gebracht. Dann beweist man durch die wiederholt angewandte Betrachtungsweise, dass in den $\vartheta(t), \ldots$ und in der Gleichung für γ die Constanten der Differentialgleichungen, nämlich m, a, b, h, k, sowie die etwa auftretenden constanten Parameter nur algebraisch auftreten, dass ferner φ als parameterfrei und infolge dessen auch als homogen in den Dimensionen vorausgesetzt werden darf. Dies festgestellt, gehen wir jetzt dazu über, das Verhalten von φ an den Stellen zu untersuchen, wo φ, als Function einer der Variablen betrachtet, einen Pol (Unendlichkeitspunkt) oder einen Verzweigungspunkt oder beides zugleich besitzt.

Es seien $\sigma, \sigma_1, \ldots$ die acht Variablen, in willkürlicher Reihenfolge geordnet. Man entwickle $\vartheta(\sigma)$ nach steigenden Potenzen von $\sigma - \tau$, wo τ einen constanten Werth oder auch eine algebraische Function der $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ bedeutet, dann enthält die Entwickelung, von besonderen Werthen der Grösse τ abgesehen, im Allgemeinen nur ganze positive Potenzen. Wir wollen jedoch die möglichen Grenzfälle sogleich mit berücksichtigen und denken uns die Reihe für $\vartheta(\sigma)$ als nicht nur ganze positive, sondern auch gebrochene und eine endliche Anzahl von negativen Potenzen enthaltend. Die Coefficienten sind algebraische Functionen der $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ und, so lange specielle Werthsysteme der $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ ausgeschlossen bleiben, so beschaffen, dass die Reihe, ohne Zerstörung der Convergenz, nach den $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ differentiirt werden kann. Die für $\vartheta(\sigma)$ gewonnene Reihe integriren wir gliederweise nach σ in der Art, dass man, abgesehen von dem etwa vorkommenden logarithmischen Gliede, wiederum eine nach $\sigma - \tau$ fortschreitende Reihe, jedoch ohne constantes Glied, erhält. Diese neue Reihe, einschliesslich des logarithmischen Gliedes, heisse $\varphi(\sigma)$.

dann darf sich $\varphi(\sigma)$ von φ nur um einen von σ unabhängigen Ausdruck unterscheiden. Bildet man

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_1}[\varphi - \varphi(\sigma)] = \vartheta(\sigma_1) - \frac{\partial\varphi(\sigma)}{\partial\sigma_1}$$

und denkt sich $\vartheta(\sigma_1)$ ebenfalls nach $\sigma - \tau$ entwickelt, so erkennt man, dass der Coefficient des logarithmischen Gliedes von σ_1 und ebenso von $\sigma_2, \ldots$ unabhängig, also constant sein muss, und dass die rechte Seite sich auf eine algebraische Function von $\sigma_1, \ldots$ reducirt. Schreiben wir also

$$\varphi = \varphi(\sigma) + \varphi'(\sigma),$$

so ist φ' durch eine Abel'sche Quadratur gegeben.

Die vorstehend gewonnene Reihenentwickelung für φ werde jetzt folgendermassen gespalten. Man vereinige zunächst zu einem Ausdrucke $\varphi(\sigma)_0$ alle ganzen Potenzen nebst dem logarithmischen Gliede und dem Term φ'. Aus dem nur gebrochene Potenzen enthaltenden Reste greifen wir das niedrigste Glied heraus und vereinigen damit zu einem Ausdrucke $\varphi(\sigma)_1$ alle Glieder, deren Exponent sich von dem des niedrigsten Gliedes um ganze Zahlen unterscheidet. Aus dem dann noch verbleibenden Reste spalten wir in gleicher Weise ein $\varphi(\sigma)_2, \varphi(\sigma)_3, \ldots$ ab, bis alle Glieder erschöpft sind, was nach einer endlichen Zahl von Spaltungen der Fall ist. Wir haben dann

$$\varphi = \varphi(\sigma)_0 + \varphi(\sigma)_1 + \cdots.$$

Diesen Ausdruck differentiiren wir vollständig nach q, wobei wir uns den Ausdruck für K ebenfalls nach Potenzen von $\sigma - \tau$ entwickelt denken. Letztere Entwickelung enthält nur ganze Potenzen, und negative nur dann, wenn für $\sigma = \tau$ der Ausdruck $q_4 H_1$ verschwindet. Die vollständig entwickelte Ableitung erscheint zunächst ebenfalls als Potenzreihe und man erkennt sofort, dass die aus den Ausdruck $\varphi(\sigma)_0, \varphi(\sigma)_1, \ldots$ entspringenden Reihen einzeln für sich verschwinden müssen, dass also die $\varphi(\sigma)_0, \ldots$ einzeln für sich Integrale sind, und zwar Abel'sche Integrale, da sie sich linear mit constanten Coefficienten aus den verschiedenen Zweigen zusammensetzen lassen, welche die Function φ an der Stelle $\sigma = \tau$ besitzt. Weiter erkennt man, wenn die verlangte Differentiation und Entwickelung an den Anfangsgliedern der einzelnen $\varphi(\sigma)$ ausgeführt wird, dass in $\vartheta(\sigma)$ negative oder gebrochene Potenzen höchstens dann auftreten können, wenn

entweder K negative Potenzen enthält, also für $\sigma = \tau$ der Ausdruck $q_4 H_1$ verschwindet, oder wenn die Entwickelung von

$$\frac{d}{dq}(\sigma - \tau)$$

kein von $\sigma - \tau$ freies Glied enthält, wenn also diese Ableitung für $\sigma = \tau$ verschwindet, d. h. $\sigma - \tau$ eine Integralgleichung ist. Hiernach erhalten wir also für den Ausdruck $\vartheta(\sigma)$, wenn derselbe als Function von σ betrachtet wird, alle im Endlichen liegenden Pole und Verzweigungspunkte durch die beiden Bedingungen

$$q_4 H_1 = 0, \qquad Q = 0.$$

Geht man, um das Verhalten von φ für sehr grosse Werthe von σ zu ermitteln, von der Entwickelung des Ausdruckes $\vartheta(\sigma)$ nach fallenden Potenzen von σ aus, so kann man genau so wie vorhin ein $\varphi(\sigma)$ bilden, dies durch Hinzufügen einer Abel'schen Quadratur $\varphi'(\sigma)$ zu φ ergänzen und dann in die Bestandtheile $\varphi(\sigma)_0$, $\varphi(\sigma)_1$, ... spalten, welche einzeln wiederum Integrale sind. Differentiirt man dann vollständig nach q, so ergibt sich, dass positive oder gebrochene Potenzen oder ein logarithmisches Glied in φ sicher nicht auftreten, wenn die Ausdrücke

$$\frac{\partial K}{\partial h}, \qquad \frac{\partial K}{\partial q_\alpha}, \qquad \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}$$

nach σ entwickelt, die Form

$$\frac{P_0}{\sigma^2} + \frac{P_1}{\sigma^3} + \frac{P_2}{\sigma^4} + \ldots$$

besitzen. Diese besondere Form findet statt, wenn σ die Variable q vertritt.

24. Nachdem wir die vorstehenden Sätze gewonnen haben, nehmen wir die $\vartheta(\sigma)$ einzeln vor. Es wird sich dabei zeigen, dass dieselben sämmtlich rationale Functionen der Variablen sein müssen. Wir beginnen mit $\vartheta(t)$. Da die Variable t in den beiden Bedingungen

$$q_4 H_1 = 0, \qquad Q = 0$$

nicht auftritt, so folgt, dass $\vartheta(t)$ für endliche Werthe von t weder verzweigt ist noch unendlich wird, also die Form $\mathfrak{G}(t)$ besitzt. Hieraus folgt für φ die Form

$$\varphi = P_0 t^n + P_1 t^{n-1} + \ldots + P_n.$$

und ferner

$$\frac{dP_0}{dq} = 0, \qquad nP_0\frac{dt}{dq} + \frac{dP_1}{dq} = 0, \quad \text{etc.}$$

woraus wir ähnlich wie in § 20 schliessen, dass n gleich Null ist, d. h. φ die Variable t überhaupt nicht enthält. Wählen wir ferner für σ die Variable p_1, so folgt, da Q die p_α nicht enthält, dass $\mathfrak{F}(p_1)$ im Endlichen nur einen Verzweigungspunkt resp. Pol besitzen kann, nämlich

$$p_1 = p_{10} = -(A_2q_3q_1p_2 + A_3q_1q_2p_3) : A_1q_2q_3.$$

Hiernach ist $\mathfrak{F}(p_1)$ ein Aggregat aus einer endlichen Zahl von Potenzen der Differenz $p_1 - p_{10}$; die $\varphi(p_1)_1, \varphi(p_1)_2, \ldots$ würden dann, wenn sie vorkämen, auf algebraische Integrale führen, müssen also in Wirklichkeit fehlen, d. h. φ muss sich auf $\varphi(\sigma)_0$ reduciren. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{F}(p_1)$ eine rationale Function von p_1 ist, deren Nenner nur die Theiler $p_1 - p_{10}$ besitzt. Das Integral φ besitzt also die Form

$$\mathfrak{R}(p_1) + P\log(p_1 - p_{10}), \qquad P = \text{Constante}.$$

Hiermit ergibt sich, dass sämmtliche $\mathfrak{F}(\sigma)$ rationale Functionen von p_1 und ebenso von p_2 und p_3 sind, deren Nenner nur Theiler von der Form q_4H_1 besitzen. Für φ ergibt sich daraus die Form

$$\varphi = P\log(q_4H_1) + P_1 + P_2,$$

wo P eine Constante, P_1 eine von den p_α freie Abel'sche Quadratur und P_2 einen von den p_α rational, von den q, q_α algebraisch abhängenden Ausdruck bedeutet. Aus der vorstehenden Form ergibt sich, dass $\mathfrak{F}(q)$ als Function von q betrachtet, als Verzweigungspunkte, nur die beiden aus

$$Q = G(q - g_1)(q - g_2)$$

sich ergebenden Stellen g_1, g_2 besitzt, während die beiden aus

$$q_4H_1 = q_4M_2(q - g_3)(q - g_4)$$

folgenden Stellen g_3, g_4 nur als Pole auftreten können; die Stelle $q = \infty$ ist, wie oben bemerkt wurde, weder Verzweigungspunkt noch Pol. Setzt man

$$\frac{q - g_1}{q - g_2} = u, \qquad \mathfrak{F}(q)dq = \mathfrak{F}(u)du,$$

so sind die Verzweigungspunkte von $\mathfrak{F}(u)$ durch $u = 0$, $u = \infty$, und die ausserdem noch vorhandenen Pole u_3, u_4 durch

$$u_3 = \frac{g_3 - g_1}{g_3 - g_2}, \qquad u_4 = \frac{g_4 - g_1}{g_4 - g_2}$$

bestimmt. Multiplicirt man nun $\mathfrak{F}(u)$ mit solchen ganzen Potenzen von $u - u_3$ resp. $u - u_4$, dass das Product an den Stellen u_3, u_4 nicht mehr unendlich wird, so ist dieses Product als ein endliches Aggregat von Gliedern der Form cu^ν darstellbar, wo die ν rationale Zahlen bedeuten. Setzt man daher

$$u = v^\lambda, \qquad \mathfrak{F}(u)du = \mathfrak{F}(v)dv,$$

wo λ eine passend gewählte ganze Zahl ist, so besitzt $\mathfrak{F}(v)$ die Gestalt $\mathfrak{R}(v)$ und enthält im Nenner als Theiler nur v und die aus

$$v^\lambda - u_3, \qquad v^\lambda - u_4$$

entspringenden linearen Theiler, welche mit

$$v - u_{31}, \qquad v - u_{32}, \ldots, \qquad v - u_{41}, \qquad v - u_{42}, \ldots$$

bezeichnet werden sollen. Die Integration nach v liefert φ in der Form

$$\varphi = c \log v + \sum_\varepsilon c_{3\varepsilon} \log(v - u_{3\varepsilon}) + \sum_\varepsilon c_{4\varepsilon} \log(v - u_{4\varepsilon}) + U_1 + U_2.$$

Hierin sind die c Constanten, U_1 von der Form $\mathfrak{R}(v)$ und U_2 eine von v freie Abel'sche Quadratur. Vergleichen wir diese Form mit oben gegebenen, nämlich

$$\varphi = P \log(q_4 H_1) + P_1 + P_2,$$

so folgt, dass die mit den Coefficienten $c_{3\varepsilon}$, $c_{4\varepsilon}$ versehenen Logarithmen nur aus der Zerlegung des Terms

$$P \log q_4 H_1 = P \log\{q_4 M_2(q - g_3)(q - g_4)\}$$

entspringen können, dass also die $c_{3\varepsilon}$, $c_{4\varepsilon}$ sämmtlich einander gleich sind. Hieraus folgt, dass sich φ in der Form

$$\varphi = e_1 \log(q - g_1) + e_2 \log(q - g_2) + e_3 \log q_4 H_1 + U'_1 + U'_2$$

schreiben lässt, wo für die e, U' dieselben Eigenschaften gelten, wie für die c, U. Stellt man nun, von der zuletzt gefundenen Form für φ ausgehend, die Entwickelung von φ nach Potenzen von $q - g_1$ oder $q - g_2$

auf, so erkennt man, dass die $\varphi(q)_1, \varphi(q)_2, \ldots$ nur aus gewissen in U_1' vorkommenden Bestandtheilen entspringen können, also, wenn sie vorkämen, rein algebraisch sein müssten. Hiernach reducirt sich φ in beiden Fällen auf den Bestandtheil $\varphi(q)_0$, d. h. $\vartheta(q)$ und damit sind die übrigen ϑ von der Form $\mathfrak{R}(q)$.

Der Ausdruck $\vartheta(q_1)$ ist in q und den p_α rational, kann also, als Function von q_1 betrachtet, im Endlichen nur Verzweigungspunkte besitzen, welche von den Variablen q, p_α unabhängig sind. Da solche nicht existiren, so ist $\vartheta(q_1)$ von der Form $\mathfrak{R}(q_1)$. Das Gleiche gilt für alle anderen ϑ und ebenso für die Variablen q_2, q_3. Hiermit haben wir, wenn wir zusammenfassen, das Resultat gewonnen, dass in dem gesuchten Abel'schen Integral, falls dasselbe existirt, die $\vartheta(q), \ldots$ sämmtlich die Gestalt $\mathfrak{R}(q, q_\alpha, p_\alpha)$ besitzen, dass ferner die Nenner als Theiler nur die Ausdrücke $q_4 H_1$ und Q besitzen, dass also φ in der Form

$$\varphi = \mathfrak{R}(q, q_\alpha, p_\alpha) + c' \log q_4 H_1 + c'' \log Q$$

darstellbar ist. Da die Entwickelung von φ nach fallenden Potenzen von q kein logarithmisches Glied besitzt, so ist

$$c' + c'' = 0,$$

so dass wir auch schreiben können

$$\varphi = \frac{\mathfrak{G}(q, q_\alpha, p_\alpha)}{(q_4 H_1)^k Q^n} + c \log \frac{q_4 H_1}{Q}.$$

25. Die Untersuchung hat uns jetzt zu der Frage geführt, ob das System 7. Ordnung ein Integral von der Form

$$\varphi = \mathfrak{R}(q, q_\alpha, p_\alpha) + c \log \frac{q_4 H_1}{Q}$$

besitzt, in welchem, wenn φ sich nicht auf eine Constante reduciren soll, der Factor c von Null verschieden sein muss, also gleich Eins gesetzt werden darf. Bezeichnen wir die beiden Bestandtheile von φ der Kürze halber mit φ_1 und φ_2, so darf der rationale Term φ_1 als algebraisch aus den Constanten m, a, b, k, h gebildet vorausgesetzt werden. Bringt man nämlich φ_1 zunächst auf die Form $\mathfrak{R}(m, a, b, k, h, I')$, wo I' eine von den $m, \ldots$ abhängende Irrationalität bedeutet, und stellt dann φ_1 in der Form

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \varphi_{11} I' + \varphi_{12} I'^2 + \cdots$$

unter möglichster Herabdrückung des Grades in Bezug auf V dar, so müssen die $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots$ sich auf Constanten reduciren. Man darf deshalb die mit V multiplicirten Terme unterdrücken oder φ_1 als rational aus den m, a, b, k, h gebildet voraussetzen. Dies festgestellt führen wir an Stelle von h die Variable p durch die Gleichung

$$o = h + pH_1 + H_2$$

ein, und erhalten dann φ_1 in der Form

$$\mathfrak{R}(p, q, p_\alpha, q_\alpha);$$

während φ in ein Integral des Systems 8. Ordnung übergeht.

In dem System 8. Ordnung lässt sich nun die allgemeine Lösung durch Reihen, welche nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreiten, darstellen, indem man die p, q nach dem Taylor'schen Satze mit Hülfe der Differentialgleichungen entwickelt. Diese Reihen convergiren innerhalb eines bestimmten Bereiches für t, sobald man festsetzt, dass für $t = o$ die Variablen endliche, und im Besondern die q_α von Null verschiedene Werthe besitzen. Substituirt man diese Reihenentwickelungen in den Zähler Z und den Nenner N von φ_1 und ebenso in $q_4 H_1$ und Q, so erhält man ähnliche Potenzreihen. Die Coefficienten sind sämmtlich nach den p, q, p_α ganz rational, nach den q_α dagegen rational, jedoch so, dass in den Nennern als Theiler nur die q_α auftreten. Der so entstehende Ausdruck

$$\frac{Z}{N} + \log \frac{q_4 H_1}{Q}$$

muss nun von t unabhängig sein, wie man auch innerhalb der angegebenen Einschränkungen die Anfangswerthe der Variablen variiren mag. Lassen wir nun diese Anfangswerthe so variiren, dass $q_4 H_1$ für $t = o$ den Werth Null annimmt, so können in den vier Reihenentwickelungen nicht sämmtliche Coefficienten verschwinden, da $q_4 H_1$, wie wir wissen, nicht Integralgleichung des Systems 8. Ordnung ist. Setzt man ausserdem fest, dass für die gewählten Anfangswerthe Q nicht verschwindet, so entspringt, wenn man φ_1 und φ_2 nach Potenzen von t entwickelt, aus φ_2 ein Glied von der Form

$$n \log t, \quad (n > o).$$

welches sich nicht fortheben kann. Die Annahme, dass ein Integral der hier betrachteten Form existire, führt also auf einen Widerspruch oder m. a. W. es existiren zu dem System 7. Ordnung keine Abel'schen Integrale, und ebenso auch nicht zu dem System 8. Ordnung.

Bei den vorstehenden Entwickelungen waren wir von einer besonderen Form der Bewegungsgleichungen für das Dreikörper-Problem ausgegangen, nämlich dem hier benutzten System 7. Ordnung. Da jedoch ein Abel'sches Integral durch eine algebraische Transformation der Variablen wiederum in ein Abel'sches Integral übergeht, so gilt das gefundene negative Resultat für alle Formen der Bewegungsgleichungen, welche aus den ursprünglichen durch rein algebraische Umformungen entstehen. Das gefundene Resultat gilt ferner auch für das Vielkörper-Problem. Reducirt man nämlich beim Vielkörper-Problem die Ordnung des Systems ähnlich wie bei dem Dreikörper-Problem durch Benutzung der bekannten Integrale, so erhält man algebraische Differentialgleichungen. Existirt zu diesen ein Abel'sches Integral, so enthält der Ausdruck, über welchen die Quadratur auszuführen ist, die Massen nur in algebraischer Weise; man müsste also unter allen Umständen durch das Verschwindenlassen einer oder mehrerer Massen zu einem Abel'schen Integral für das Dreikörper-Problem gelangen, was nicht sein darf.

Die vorstehend hergeleiteten negativen Ergebnisse enthalten, wie mir scheint, eine hinreichende Erklärung für die Thatsache, dass man bei der Aufsuchung neuer Integrale des Dreikörper-Problems seither nicht über den bereits vor einem Jahrhundert erreichten Standpunkt hinausgelangt ist.

Berichtigung.

Seite 64, Zeile 2 v. u. ist »sich« zu streichen.

ZUR THEORIE DER MEHRWERTHIGEN, MEHRFACH LINEÄR VERKNÜPFTEN FUNCTIONEN

VON

KARL HEUN
in MÜNCHEN.

Durch die tiefsinnigen Forschungen des Herrn POINCARÉ ist die Theorie der linearen Differentialgleichungen auf ebenso sichere Grundlagen gestützt worden, wie die Theorie der elliptischen Functionen durch die Arbeiten von ABEL und JACOBI. Wie die Thetafunctionen das Umkehrungsproblem für die elliptischen Integrale lösen, so erlauben die Functionen des Herrn POINCARÉ (Acta Mathematica, Bd. 1, p. 193) das analoge Problem im Gebiete der linearen Differentialgleichungen zu behandeln. Wir beschäftigen uns jedoch im Folgenden nicht mit den eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich, sondern mit den mehrdeutigen Functionen, deren Periodicität durch lineäre homogene Substitutionen bestimmt ist. Die nachstehende Untersuchung schliesst sich insbesondere an die vierte Abhandlung POINCARÉS (d. Zeitschr., Bd. 4, p. 201) an. Andererseits steht sie in enger Beziehung zu einer bekannten posthumen Abhandlung RIEMANNS (Werke, p. 357) namentlich in Betreff der methodischen Gesichtspunkte. Die Resultate, zu welchen wir gelangt sind, werden insbesondere dazu dienen können die Theorie der POINCARÉ'schen sogen. Zetafunctionen einst weiter auszubilden. (Man vergl. d. Zeitschr., Bd. 5, p. 212.)

1. Wir betrachten im Folgenden eine mehrdeutige Function einer unabhängigen Veränderlichen x, welche auf einer unendlich-blättrigen RIEMANN'schen Kugelfläche mit i endlichen Verzweigungspunkten $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_i$ und dem Unendlichkeitspunkte ξ_{i+1} eine eindeutige Function des Ortes

ist, derart, dass zwischen je $p+1$ Zweigen eine lineäre homogene Relation mit bestimmten constanten Coefficienten besteht. Eine solche Function soll, insoweit sie durch diese Festsetzungen determinirt ist, eine *p-fach lineär verknüpfte* heissen. Ist nun $\mathfrak{B}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, i+1$) die homogene lineäre Substitution, welche das Verhalten der zum Punkte ξ_ι gehörigen, willkürlich angenommenen, Zweiggruppe $(y_{1\iota}, y_{2\iota}, \ldots, y_{p\iota})$ bei einmaliger positiver Umkreisung des Punktes ξ_i ausdrückt, dann ist bekanntlich

$$(1) \qquad \mathfrak{B}_{i+1} \,.\, \mathfrak{B}_i \ldots \mathfrak{B}_2 \,.\, \mathfrak{B}_1 = 1.$$

Setzt man ferner in üblicher Weise

$$\mathfrak{B}_i = B_i \,.\, \begin{vmatrix} w_i^{(1)}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & w_i^{(2)}, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & w_i^{(p)} \end{vmatrix} \,.\, B_i^{-1} \qquad {\scriptstyle (i = 1, 2, \ldots, \iota-1, \iota+1, \ldots, i+1)}$$

und

$$B_\iota = B_\iota^{-1} = 1$$

dann ist das Verhalten eines bestimmten Zweiges $y_{\mathfrak{p}i}$ $\left({\mathfrak{p}=1, 2, \ldots, p \atop i=1, 2, \ldots, i+1}\right)$ bestimmt durch die Gleichung:

$$y_{\mathfrak{p}i} = (x - \xi_i)^{\frac{\log w_i^{(\mathfrak{p})}}{2\pi\sqrt{-1}}} \,.\, \Phi_{\mathfrak{p}i}(x - \xi_i)$$

$$(x - \xi_{i+1}) = \frac{1}{x},$$

wo $\Phi_{\mathfrak{p}i}(x - \xi_i)$ eine im Punkte ξ_i eindeutige, stetige und nicht verschwindende Function bedeutet. Die Wurzeln $w_i^{(\mathfrak{p})}$ ($\mathfrak{p} = 1, 2, \ldots, p$) der zum Punkte ξ_i gehörigen determinirenden Gleichung wollen wir als von einander verschieden betrachten.

Nun ist aber, wenn wir den üblichen Initialzweig von $\log x$ mit $\operatorname{Log} x$ bezeichnen

$$\log w_i^{(\mathfrak{p})} = \operatorname{Log} w_i^{(\mathfrak{p})} + 2m\pi\sqrt{-1}$$

folglich

$$\frac{\log w_i^{(\mathfrak{p})}}{2\pi\sqrt{-1}} = \lambda_{\mathfrak{p}i} + m$$

wenn $\lambda_{\mathfrak{p}i}$ durch die Gleichung:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Log} w_i^{(\mathfrak{p})} = 2\pi\sqrt{-1} \cdot \lambda_{\mathfrak{p}i}$$

definirt ist.

Wir bezeichnen nun alle Functionen (y), deren Periodicität in Bezug auf dieselben Verzweigungspunkte durch *dieselben* erzeugenden Substitutionen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_i$ definirt ist als zurselben *Art* (= »espèce» in der Terminologie des Herrn Poincaré) gehörige.

Für zwei Systeme (y), welche von derselben Art sind, unterscheiden sich demnach die correspondirenden Verzweigungsindices (λ) um ganze Zahlen (m).

Zwischen je $p+1$ Functionen derselben Art: $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ besteht eine fundamentale Relation, deren Form sich durch Betrachtung der folgenden identisch verschwindenden Determinante ergiebt

$$\begin{vmatrix} y_{\mathfrak{p}\iota}^{(0)}, & y_{\mathfrak{p}\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{\mathfrak{p}\iota}^{(\bar\omega)}, & \ldots, & y_{\mathfrak{p}\iota}^{(p)} \\ y_{1\iota}^{(0)}, & y_{1\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{1\iota}^{(\bar\omega)}, & \ldots, & y_{1\iota}^{(p)} \\ y_{2\iota}^{(0)}, & y_{2\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{2\iota}^{(\bar\omega)}, & \ldots, & y_{2\iota}^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{p\iota}^{(0)}, & y_{p\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{p\iota}^{(\bar\omega)}, & \ldots, & y_{p\iota}^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Nimmt man die Unterdeterminanten in Bezug auf die erste Horizontalreihe, dann erhält man eine homogene lineäre Gleichung von der Form:

$$\text{(3)} \qquad \Delta_\iota^{[0]} \cdot y_{\mathfrak{p}\iota}^{(0)} + \Delta_\iota^{[1]} \cdot y_{\mathfrak{p}\iota}^{(1)} + \ldots + \Delta_\iota^{[p]} \cdot y_{\mathfrak{p}\iota}^{(p)} = 0. \qquad \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{p}=1,2,\ldots,p \\ \iota=1,2,\ldots,i,i+1 \end{smallmatrix}\right)$$

Die Entwicklung von $\Delta_\iota^{[\bar\omega]}$ besteht aus einem Aggregat von Produkten von je p Factoren, von denen jeder in dem Bereich des Punktes ξ_ι die Form hat

$$y_{\mathfrak{p}\iota}^{(\mathfrak{p})} = (x - \xi_\iota)^{\lambda_{\mathfrak{p}\iota}^{(\mathfrak{p})}} \cdot \phi_{\mathfrak{p}\iota}(x - \xi_\iota). \qquad (\mathfrak{p} = 0, 1, 2, \ldots, \bar\omega - 1, \bar\omega + 1, \ldots$$

Der erste Term in der expliciten Gestalt der Determinante $\Delta_\iota^{[\bar\omega]}$ heisst also:

$$(x - \xi_\iota)^{\lambda_{1\iota}^{(0)} + \lambda_{2\iota}^{(1)} + \cdots + \lambda_{\bar\omega,\iota}^{(\bar\omega-1)} + \lambda_{\bar\omega+1,\iota}^{(\bar\omega+1)} + \cdots + \lambda_{p\iota}^{(p)}} \cdot \phi_1(x - \xi_\iota).$$

Die nächstfolgenden Terme ergeben sich aus diesem ersten, indem der

Exponent von $(x - \xi_\iota)$ durch die Summe aller übrigen möglichen Permutationen zu je p der p^2 Indices $\lambda_{\mathfrak{p}\iota}^{(\mathfrak{p})}$ ersetzt und jede der so entstandenen Potenzen mit einer Φ-Function multiplicirt wird. Diese Exponentensummen können sowohl positive als negative Werthe haben. Diejenige Summe, welche von allen übrigen um eine positive ganze Zahl übertroffen wird, soll durch $E_\iota^{[\tilde{\omega}]}$ bezeichnet werden. Es ist also

$$\Delta_\iota^{[\tilde{\omega}]} = (x - \xi_\iota)^{E_\iota^{[\tilde{\omega}]}} \,.\, \Phi_\iota^{[\tilde{\omega}]}(x - \xi_\iota).$$

Da nun

$$\Delta_\iota^{[\tilde{\omega}]} = \text{Det. } B_{\mathrm{i}} \,.\, \Delta_{\mathrm{i}}^{[\tilde{\omega}]}$$

so ist auch

$$\Delta_\iota^{[\tilde{\omega}]} = (x - \xi_{\mathrm{i}})^{E_{\mathrm{i}}^{[\tilde{\omega}]}} \,.\, \Phi_{\mathrm{i}}^{[\tilde{\omega}]}(x - \xi_{\mathrm{i}}).$$

Folglich ist

$$\Delta_\iota^{[\tilde{\omega}]} \,.\, (x - \xi_1)^{-E_1^{[\tilde{\omega}]}} \,.\, (x - \xi_2)^{-E_2^{[\tilde{\omega}]}} \ldots (x - \xi_i)^{-E_i^{[\tilde{\omega}]}}$$

eine ganze rationale Function von x vom Grade

$$-\,[E_1^{[\tilde{\omega}]} + E_2^{[\tilde{\omega}]} + \ldots + E_{i+1}^{[\tilde{\omega}]}],$$

welche wir mit $F_{\tilde{\omega}}$ bezeichnen wollen. Es ist

$$[E_1^{[\tilde{\omega}]} + E_2^{[\tilde{\omega}]} + \ldots + E_{i+1}^{[\tilde{\omega}]}] = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p} \sum_{(\mathrm{i})}^{i+1} \lambda_{\mathfrak{p}\mathrm{i}}^{(\mathfrak{p})} + \sum D_{\mathfrak{p}}^{[\tilde{\omega}]}$$

wo unter $\sum D_{\mathfrak{p}}^{[\tilde{\omega}]}$ die Summe aller auf das System $(y^{(\mathfrak{p})})$ bezogenen Indicesdifferenzen zu verstehen ist. Die rechte Seite dieser Gleichung darf also nicht > 0 werden. Die Gleichung (3) nimmt nach dem Vorstehenden die Form an:

$$y_{\mathfrak{p}\iota}^{(0)} \,.\, (x - \xi_1)^{E_1^{[0]}} \,.\, (x - \xi_2)^{E_2^{[0]}} \ldots (x - \xi_i)^{E_i^{[0]}} \,.\, F_0$$

$$+\, y_{\mathfrak{p}\iota}^{(1)} \,.\, (x - \xi_1)^{E_1^{[1]}} \,.\, (x - \xi_2)^{E_2^{[1]}} \ldots (x - \xi_i)^{E_i^{[1]}} \,.\, F_1 + \ldots$$

$$\ldots + y_{\mathfrak{p}\iota}^{(\tau)} \,.\, (x - \xi_1)^{E_1^{[\tau]}} \,.\, (x - \xi_2)^{E_2^{[\tau]}} \ldots (x - \xi_i)^{E_i^{[\tau]}} \,.\, F_\tau = 0.$$

Da die Differenzen der Grössen $E_\iota^{[0]}, E_\iota^{[1]}, \ldots, E_\iota^{[p]}$ ganze Zahlen sind, so lässt sich die Gleichung auf die Form bringen:

$$H_0(x) \,.\, y_{\mathfrak{p}\iota}^{(0)} + H_1(x) \,.\, y_{\mathfrak{p}\iota}^{(1)} + \ldots + H_p(x) \,.\, y_{\mathfrak{p}\iota}^{(p)} = 0. \tag{4}$$

Die Grössen $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_p(x)$ sind ganze rationale Functionen von bekannten Graden. Die Gleichung (4) enthält den Riemann'schen Satz:

»Zwischen je $p+1$ Elementen eines Systems p-fach lineär verknüpfter Functionen derselben Art besteht eine lineäre homogene Relation, deren Coefficienten ganze rationale Coefficienten der unabhängigen Veränderlichen sind.»

Wir haben diesen bekannten Satz hier reproducirt, weil uns die angewendete Bezeichnung eine kürzere Darstellung der folgenden Untersuchungen erlaubt.

2. Da alle Derivirten einer p-fach lineär verknüpften Function dieselbe Periodicität besitzen, wie die primitive Function, so sind sie auch alle mit der letzteren von derselben Art. Bei jeder Differentiation erniedern sich die Verzweigungsindices um eine Einheit. In der Gleichung (4) sind demnach eine gewisse Anzahl von Differentialgleichungen mehrerer abhängiger Veränderlichen enthalten.

Wir wollen nur den Fall untersuchen, in welchem die $p+1$ Functionen derselben Art, zwischen denen eine Gleichung (4) bestehen muss, die folgenden seien:

$$y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-\pi}y}{dx^{p-\pi}},$$

$$z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^{\pi-1}z}{dx^{\pi-1}}.$$

Alsdann heisst die Riemann'sche Fundamentalgleichung:

$$0 = F_0 \,.\, y + F_1 \,.\, \frac{dy}{dx} + \ldots + F_{p-\pi} \,.\, \frac{d^{p-\pi}y}{dx^{p-\pi}}$$

$$+ G_0 \,.\, z + G_1 \,.\, \frac{dz}{dx} + \ldots + G_{\pi-1} \,.\, \frac{d^{\pi-1}z}{dx^{\pi-1}}.$$

Die Grössen $E_\iota^{[\varpi]}$ der vorigen Nummer wollen wir jetzt in zwei Gruppen $E_\iota^{[\varpi_1]}$ und $E_\iota^{[\varpi_2]}$ theilen, welche beziehungsweise den Functionen

F und G entsprechen sollen. Die Grössen $E_i^{[\tilde\omega_1]}$ und $E_i^{[\tilde\omega_2]}$ ergeben sich aus der Betrachtung der Determinante:

$$0 = \begin{vmatrix} y_{\mathfrak{p}i}\,, & \frac{dy_{\mathfrak{p}i}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde\omega_1} y_{\mathfrak{p}i}}{dx^{\tilde\omega_1}}\,, & \ldots, & \frac{d^{p-\pi} y_{\mathfrak{p}i}}{dx^{p-\pi}}\,, & z_{\mathfrak{p}i}\,, & \frac{dz_{\mathfrak{p}i}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde\omega_2} z_{\mathfrak{p}i}}{dx^{\tilde\omega_2}}\,, & \ldots, & \frac{d^{\pi-1} z_{\mathfrak{p}i}}{dx^{\pi-1}} \\ y_{1i}\,, & \frac{dy_{1i}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde\omega_1} y_{1i}}{dx^{\tilde\omega_1}}\,, & \ldots, & \frac{d^{p-\pi} y_{1i}}{dx^{p-\pi}}\,, & z_{1i}\,, & \frac{dz_{1i}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde\omega_2} z_{1i}}{dx^{\tilde\omega_2}}\,, & \ldots, & \frac{d^{\pi-1} z_{1i}}{dx^{\pi-1}} \\ y_{2i}\,, & \frac{dy_{2i}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde\omega_1} y_{2i}}{dx^{\tilde\omega_1}}\,, & \ldots, & \frac{d^{p-\pi} y_{2i}}{dx^{p-\pi}}\,, & z_{2i}\,, & \frac{dz_{2i}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde\omega_2} z_{2i}}{dx^{\tilde\omega_2}}\,, & \ldots, & \frac{d^{\pi-1} z_{2i}}{dx^{\pi-1}} \\ y_{pi}\,, & \frac{dy_{pi}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde\omega_1} y_{pi}}{dx^{\tilde\omega_1}}\,, & \ldots, & \frac{d^{p-\pi} y_{pi}}{dx^{p-\pi}}\,, & z_{pi}\,, & \frac{dz_{pi}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde\omega_2} z_{pi}}{dx^{\tilde\omega_2}}\,, & \ldots, & \frac{d^{\pi-1} z_{pi}}{dx^{\pi-1}} \end{vmatrix}.$$

Bedenkt man nun dass

$$\frac{d^{\tilde\omega_1} y_{\mathfrak{p}i}}{dx^{\tilde\omega_1}} = (x - \xi_i)^{\lambda_{\mathfrak{p}i} - \tilde\omega_1} \,.\, \Phi^{(\tilde\omega_1)}(x - \xi_i),$$

$$\frac{d^{\tilde\omega_2} z_{\mathfrak{p}i}}{dx^{\tilde\omega_2}} = (x - \xi_i)^{\lambda_{\mathfrak{p}i} + \tilde\varrho_{\mathfrak{p}i} - \tilde\omega_2} \,.\, \Phi^{(\tilde\omega_2)}(x - \xi_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

dann findet man zunächst

$$E_i^{[\tilde\omega_1]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p} \lambda_{\mathfrak{p}i} + \{0 + 1 + 2 + \ldots + (\tilde\omega_1 - 1) + (\tilde\omega_1 + 1) + \ldots + (p - \pi)\}$$

$$+ \mathfrak{D}_i + \frac{1}{2}\pi(\pi - 1), \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

während

$$E_{n+1}^{[\tilde\omega_1]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p} \lambda_{\mathfrak{p}, n+1} + \{0 + 1 + 2 + \ldots + (\tilde\omega_1 - 1) + (\tilde\omega_1 + 1) + \ldots + (p - \pi)\}$$

$$+ \mathfrak{D}_{n+1} + \frac{1}{2}\pi(\pi - 1)$$

da $x - \xi_{n+1} = \frac{1}{x}$ zu nehmen ist.

Die Grössen $\mathfrak{D}_i$ bestimmen sich folgendermassen. Man nimmt aus dem Schema:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 0. & 1. & \ldots & \tilde{\omega}_2. & \ldots & \pi-1. \\
\hline
1. & \partial_{1i} & \partial_{1i} & \ldots & \partial_{1i} & \ldots & \partial_{1i} \\
2. & \partial_{2i} & \partial_{2i} & \ldots & \partial_{2i} & \ldots & \partial_{2i} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
p. & \partial_{pi} & \partial_{pi} & \ldots & \partial_{pi} & \ldots & \partial_{pi}
\end{array}$$

je π Elemente aus verschiedenen Vertikal- und Horizontalreihen, was auf $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p$ Arten möglich ist und addirt dieselben. Aus der Reihe der so entstehenden Summen:

$$S_i^{(1)}\,,\; S_i^{(2)}\,,\; \ldots\,,\; S_i^{(1\,2\ldots p)}$$

ist $\mathfrak{D}_i$ diejenige, welche von allen übrigen um positive Grössen übertroffen wird. Ferner findet man für $i = 1, 2, \ldots, i$ den Ausdruck:

$$E_i^{[\tilde{\omega}_2]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p} \lambda_{\mathfrak{p}i} - \frac{1}{2}(p-\pi)(p-\pi+1)$$

$$+ \mathfrak{D}_i^{[\tilde{\omega}_2]} - \{0+1+2+\ldots+(\tilde{\omega}_2-1)+(\tilde{\omega}_2+1)+\ldots+(\pi-1)\}$$

und

$$E_{i+1}^{[\tilde{\omega}_2]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p} \lambda_{\mathfrak{p},\,i+1} + \frac{1}{2}(p-\pi)(p-\pi+1)$$

$$+ \mathfrak{D}_{i+1}^{[\tilde{\omega}_2]} + \{0+1+2+\ldots+(\tilde{\omega}_2-1)+(\tilde{\omega}_2+1)+\ldots+(\pi-1)\}.$$

Um die Grössen $\mathfrak{D}_i^{[\tilde{\omega}_2]}$ zu bestimmen lasse man in dem obigen $p\,.\,\pi$-gliedrigen Schema die mit $\tilde{\omega}_2$ bezeichnete Verticalreihe aus und bilde die Summen aus je $\pi - 1$ Elementen $(\partial_{\mathfrak{p}i})$, welche verschiedenen Vertikal- und Horizontalreihen angehören. Alsdann ist diejenige Summe, welche von den übrigen (für ein festes i) um positive Grössen übertroffen wird, die mit $\mathfrak{D}_i^{[\tilde{\omega}_2]}$ bezeichnete Grösse.

Unsere Differentialgleichung nimmt jetzt die Form an:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i}\Big\{F_0[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)].y \\
&\qquad +\psi(x).F_1[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)-(i-1)]\frac{dy}{dx} \\
&\qquad +[\psi(x)]^2.F_2[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)-2(i-1)]\frac{d^2y}{dx^2} \\
&\qquad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad +[\psi(x)]^{p-\pi}.F_{p-\pi}[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)-(p-\pi)(i-1)]\frac{d^{p-\pi}y}{dx^{p-\pi}}\Big\} \\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[0]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[0]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[0]}}.G_0[h-D^{[0]}-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)]z \\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[1]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[1]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[1]}}.G_1[h-D^{[1]}-\{(p-\pi)(\pi-1)+1\}(i-1)]\frac{dz}{dx} \\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[2]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[2]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[2]}}.G_2[h-D^{[2]}-\{(p-\pi)(\pi-1)+2\}(i-1)]\frac{d^2z}{dx^2} \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[\pi-1]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[\pi-1]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[\pi-1]}}.G_{\pi-1}[h-D^{[\pi-1]}-\{(p-\pi)(\pi-1) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +(\pi-1)\}(i-1)]\frac{d^{\pi-1}z}{dx^{\pi-1}}=0,
\end{aligned}
\right.
$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\psi(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_i) \\
&h=\frac{1}{2}p(p-1)(i-1)-\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{i}} \\
&D^{[\tilde{\omega}_2]}=\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}^{[\tilde{\omega}_2]};\qquad D=\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Die Grade der ganzen rationalen Functionen $F_0, F_1, \ldots, F_{p-\pi}$; G_0, G_1, ... $G_{\pi-1}$ sind in den beigefügten Klammern angegeben. Die Grössen

$$h - D - (p-\pi)\pi(i-1)$$

$$h - D^{(\mathrm{p})} - \{(p-\pi)(\pi-1) + \mathrm{p}\}(i-1) \qquad (\mathrm{p}=0,1,2,\ldots,\pi-1)$$

dürfen nicht negativ sein, wodurch den Indicesdifferenzen $\delta_{\mathrm{p}i}$ gewisse Bedingungen auferlegt werden.

3. Die Formel (I) ist besonders bemerkenswerth wenn $\pi = 1$ angenommen wird, da alsdann die Derivirten von z herausfallen. Es werden ferner die Grössen $\mathfrak{D}_i^{[\omega_2]}$ zu Null. $\mathfrak{D}_i$ wird in der Reihe δ_{1i}, $\delta_{2i}, \ldots, \delta_{pi}$ enthalten sein und zwar ist es diejenige Grösse, welche von den übrigen um positive Zahlen übertroffen wird. Man erhält also die einfache Gleichung:

$$\text{(II)} \qquad 0 = (x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i}\left\{F_0.y + \phi.F_1.\frac{dy}{dx} + \ldots\right.$$

$$\left. + \phi^{p-1}.F_{p-1}.\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}\right\} + G_0[h].z,$$

$$F_{\mathrm{p}} = F_{\mathrm{p}}[h - D - \mathrm{p}(i-1)]$$

mit der Bedingung:

$$h - D - (p-1)(i-1) \geq 0.$$

Setzt man endlich in der Gleichung (I) den Index π der Null gleich, dann resultirt die Differentialgleichung p^{ter} Ordnung für die Function y:

$$\text{(A)} \qquad 0 = F_0[h + p(i-1)]y + \phi.F_1[h + (p-1)(i-1)]\frac{dy}{dx} + \ldots$$

$$+ \phi^{p-1}.F_{p-1}[h + i - 1]\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \phi^p.F_p[h]\frac{d^p y}{dx^p}$$

denn es ist

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \ldots = \mathfrak{D}_{i+1} = 0$$

also auch $D = 0$.

Für $k = 0$ erhält man die bekannte Fuchs'sche Form der Differentialgleichung:

$$(A') \qquad 0 = F_0[p(i-1)].y + \psi.F_1[(p-1)(i-1)].\frac{dy}{dx} + \dots$$

$$+ \psi^{p-1}.F_{p-1}[i-1].\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \psi^p.\frac{d^p y}{dx^p}.$$

In diesem Falle ist

$$(a) \qquad \sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} = \frac{1}{2}\,p(p-1)(i-1).$$

Die Gleichung (A') lässt sich noch weiter vereinfachen. Es ist nemlich

$$y\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1,i}, \lambda_{1,i+1} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2,i}, \lambda_{2,i+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{p1}, \lambda_{p2}, \dots, \lambda_{p,i}, \lambda_{p,i+1} \end{vmatrix}$$

$$= (x-\xi_1)^{\varepsilon_1}.(x-\xi_2)^{\varepsilon_2}\dots(x-\xi_i)^{\varepsilon_i}.\,y\begin{vmatrix} \lambda'_{11}, \lambda'_{12}, \dots, \lambda'_{1,i}, \lambda'_{1,i+1} \\ \lambda'_{21}, \lambda'_{22}, \dots, \lambda'_{2,i}, \lambda'_{2,i+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda'_{p1}, \lambda'_{p2}, \dots, \lambda'_{p,i}, \lambda'_{p,i+1} \end{vmatrix},$$

wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i$ ganz beliebige Grössen sind und zwischen den Indices $\lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}$ und $\lambda'_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}$ die Relationen bestehen:

$$\lambda'_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} = \lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} - \varepsilon_{\mathfrak{i}} \qquad {\scriptstyle (\mathfrak{i}=1,2,\dots,i)}$$

$$\lambda'_{\mathfrak{p},i+1} = \lambda_{\mathfrak{p},i+1} + \sum_{(\mathfrak{i})}^{i}\varepsilon_{\mathfrak{i}}.$$

Man kann also jede Function y auf eine andere zurückführen, für welche i Indices in i verschiedenen Verticalreihen *willkürliche* Werthe erhalten. Wir können daher insbesondere setzen:

$$(6) \qquad \lambda_{1\mathfrak{i}} + \lambda_{2\mathfrak{i}} + \dots + \lambda_{p\mathfrak{i}} = n_{\mathfrak{i}} \qquad {\scriptstyle (\mathfrak{i}=1,2,\dots,i)}$$

wo die Grössen $n_1, n_2, \ldots, n_i$ beliebige ganze Zahlen sein sollen. Dann ist

$$\text{Det.}\,\mathfrak{B}_i = w_i^{(1)}.w_i^{(2)}\ldots w_i^{(p)} = e^{2n_i\pi} = 1\,. \qquad (i=1,2,\ldots,i)$$

Wegen der Gleichung (a) ist aber

$$\lambda_{1,i+1} + \lambda_{2,i+1} + \cdots + \lambda_{p,i+1} = \frac{1}{2}p(p-1)(i-1) - \sum_{(i)}^{i} n_i\,.$$

Folglich ist auch $\text{Det.}\,\mathfrak{B}_{i+1} = 1$.

Die zur Gleichung (A′) gehörende determinirende Gleichung heisst für den Verzweigungspunkt ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, i)$:

$$F_0 + F_1.\psi'.\lambda + F_2.\psi'^2.\lambda(\lambda-1) + \ldots$$
$$+ F_{p-1}.\psi'^{p-1}.\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-p+2) + \psi'^p.\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-p+1) = 0$$

wo in $F_0, F_1, \ldots, F_{p-1}$, so wie in $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ das Argument $x = \xi_i$ zu setzen ist.

F_{p-1} ist in Bezug auf ξ_i vom Grade $i-1$, wir können also setzen:

$$F_{p-1} = g_0 + g_1\xi_i + \cdots + g_{i-1}\xi_i^{i-1}.$$

Da der Coefficient von λ^{p-1} in der determinirenden Gleichung gleich $-\sum_{(\nu)}^{p}\lambda_{\nu i}$ sein muss, so erhalten wir die folgenden linearen Gleichungen zur Bestimmung der Grössen $g_0, g_1, \ldots, g_{i-1}$:

$$g_0 + \xi_i.g_1 + \xi_i^2.g_2 + \cdots + \xi_i^{i-1}.g_{i-1} = \left|\frac{1}{2}p(p-1) - n_i\right|\psi'(\xi_i). \qquad (i=1,2,\ldots,i)$$

Das Glied $F_{p-1}[i-1]\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}$ fällt also aus der Differentialgleichung (A′) aus, wenn wir setzen:

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_i = \frac{1}{2}p(p-1).$$

Das System, für welches $\sum_{(\nu)}^{p}\lambda_{\nu i} = \frac{1}{2}p(p-1)$ ist, wollen wir im Folgenden ein »reducirtes« nennen.

4. Die Existenz der Functionen y, insofern sie der Gleichung (A′)

genügen, ist von Herrn Fuchs in aller Strenge nachgewiesen. Wenn wir also ein allgemeineres System (z), welches der Gleichung:

$$0 = G_0[k + p(i-1)]z + \psi . G_1[k + (p-1)(i-1)]\frac{dz}{dx} + \cdots$$

$$+ \psi^{p-1} . G_{p-1}[k + i - 1]\frac{d^{p-1}z}{dx^{p-1}} + \psi^p . G_p[k]\frac{d^p z}{dx^p},$$

genügt, wo

$$k = -\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\delta_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}},$$

durch ein Hauptsystem analytisch ausdrücken können, dann ist die Existenz von z ebenfalls ausser Zweifel. Der Zusammenhang beider Systeme ist aber gegeben durch die Gleichung:

$$z = (x - \xi_1)^{\mathfrak{D}_1} . (x - \xi_2)^{\mathfrak{D}_2} \ldots (x - \xi_i)^{\mathfrak{D}_i}\Big\{P_0 . y + \psi . P_1 . \frac{dy}{dx} + \cdots$$

$$+ \psi^{p-1} . P_{p-1} . \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}\Big\}$$

wo $P_{\mathfrak{p}}$ $(\mathfrak{p} = 0, 1, \ldots, p-1)$ eine ganze rationale Function vom Grade: $-D - \mathfrak{p}(i-1)$ ist. Aus der letzteren Gleichung erkennt man unmittelbar, dass die Wurzeln der Gleichung $G_p[k] = 0$ nicht Unstetigkeitspunkte der Functionen z sein können. Da die Coefficienten der Function $G_p[k]$ zur Festlegung eines Individuums dienen können, so wollen wir dieselben die »individuellen» Parameter der Function z nennen.

Bisher sind die Functionen $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$ in der Reductionsformel nur dem *Grade* nach bekannt. Die Coefficienten in denselben bleiben also zu bestimmen. Die natürlichste Methode zur Bestimmung derselben besteht darin, die Thatsache zur analytischen Formulirung zu bringen, dass zu z dieselben »erzeugenden» Substitutionen gehören wie zu y. Allein dieser Weg hat beträchtliche Schwierigkeiten, da diese erzeugenden Substitutionen von der Wahl der Initialzweige abhängen, während die »definirenden» Elemente der mehrfach lineär verknüpften Functionen die independenten Invarianten jener Substitutionen sind. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, machen wir die Annahme, die Functionen z seien, ebenso wie die Functionen y, durch ihre Differentialgleichung »determinirt».

Dass dies der Fall ist, lässt sich auch streng beweisen, indem man den Fuchs'schen Existenzbeweis, nur ganz unbedeutend modificirt, auf die Differentialgleichung der z anwendet. Wir werden im Folgenden voraussetzen, dies sei geschehen.

Man kann stets annehmen die Indices des Systems (z) seien so beschaffen, dass $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \ldots = \mathfrak{D}_i = 0$ sei. Denn ist dies thatsächlich nicht der Fall, dann können wir (nach N° 3), ohne die Allgemeinheit zu beschränken, die Function z stets auf eine solche mit veränderten Indices zurückführen, für welche diese Bedingungen erfüllt sind. Alsdann kann man aber über die Grössen $\partial_{1,i+1}, \partial_{2,i+1}, \ldots, \partial_{p,i+1}$ nicht mehr verfügen. Jedenfalls muss $D = \mathfrak{D}_{i+1}$ negativ sein. Wir setzen daher $D = -m$. Die Reductionsgleichung nimmt dann die folgende Form an

$$
(7) \qquad z = P_0[m].y + \psi.P_1[m-(i-1)].\frac{dy}{dx} + \ldots
$$

$$
+ \psi^{p-1}.P_{p-1}[m-(p-1)(i-1)].\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}.
$$

Aus dieser Gleichung entwickele man die Grössen:

$$
\psi\frac{dz}{dx}, \quad \psi^2\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \psi^p\frac{d^pz}{dx^p},
$$

und eliminire mit Hülfe der Differentialgleichung, alle Derivirten von y, welche die $(p-1)^{\text{te}}$ übersteigen. Auf diese Weise erhält man Ausdrücke von der Form:

$$
(8) \quad \begin{cases}
\psi\dfrac{dz}{dx} = a_{11}.y + a_{12}.\psi.\dfrac{dy}{dx} + \ldots + a_{1p}.\psi^{p-1}.\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}. \\[2ex]
\psi^2\dfrac{d^2z}{dx^2} = a_{21}.y + a_{22}.\psi.\dfrac{dy}{dx} + \ldots + a_{2p}.\psi^{p-1}.\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}. \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\psi^p\dfrac{d^pz}{dx^p} = a_{p1}.y + a_{p2}.\psi.\dfrac{dy}{dx} + \ldots + a_{pp}.\psi^{p-1}.\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}.
\end{cases}
$$

Bezeichnet man den Grad einer ganzen Function Fx mit ΓFx, dann

lassen sich die Grade der ganzen Functionen $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{pp}$ in folgender Weise darstellen:

$$
(8')\quad \left|\begin{array}{llll}
\Gamma a_{11} = m + i - 1, & \Gamma a_{12} = m, & \ldots, & \Gamma a_{1p} = m - (p-2)(i-1) \\
\Gamma a_{21} = m + 2(i-1), & \Gamma a_{22} = m + i - 1, & \ldots, & \Gamma a_{2p} = m - (p-3)(i-1), \\
\Gamma a_{31} = m + 3(i-1), & \Gamma a_{32} = m + 2(i-1), & \ldots, & \Gamma a_{3p} = m - (p-4)(i-1) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\Gamma a_{p1} = m + p(i-1), & \Gamma a_{p2} = m + (p-1)(i-1), & \ldots, & \Gamma a_{pp} = m + i - 1.
\end{array}\right.
$$

Man führe nun die Grössen $\psi \frac{dz}{dx}, \psi^2 \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots, \psi^p \frac{d^p z}{dx^p}$ und z in die Differentialgleichung von z ein, dann erhält man:

$$
\begin{aligned}
0 = (P_0 G_0 + a_{11} G_1 + \ldots + a_{p1} G_p) y + (P_1 G_0 + a_{12} G_1 + \ldots + a_{p2} G_p) \psi \frac{dy}{dx} + \ldots \\
+ (P_{p-1} G_0 + a_{1p} G_1 + \ldots + a_{pp} G_p) \psi^{p-1} \frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck ist aber eine homogene lineäre Differentialgleichung $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für die Function y. Würde die Function y dieser Gleichung genügen, so müsste zwischen je p Zweigen so wohl als zwischen je $p+1$ Zweigen derselben eine lineäre homogene Relation mit constanten Coefficienten bestehen, was offenbar unmöglich ist. Desshalb muss diese Gleichung identisch Null sein d. h. es müssen für jeden Werth von x die Gleichungen bestehen

$$
\begin{gathered}
P_0 G_0 + a_{11} G_1 + \ldots + a_{p1} G_p = 0, \\
P_1 G_0 + a_{12} G_1 + \ldots + a_{p2} G_p = 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
P_{p-1} G_0 + a_{1p} G_1 + \ldots + a_{pp} G_p = 0.
\end{gathered}
$$

Diese Gleichungen sind in Bezug auf x, der Reihe nach, von dem Grade:

$$
m + k + p(i-1),\ m + k + (p-1)(i-1),\ \ldots,\ m + k + (i-1).
$$

Sie liefern also im Ganzen $p(m+k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)$ Bedingungsgleichungen für die Coefficienten in den ganzen rationalen Functionen

$$P_0, P_1, \ldots, P_{p-1};\ G_0, G_1, \ldots, G_p;\ a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{pp}.$$

Von diesen Gleichungen sind aber nur $p(m+k+i+1)-1$ von einander unabhängig, während die übrigen

$$\frac{1}{2}p\{p(i-1)-(i+1)\}+1$$

Gleichungen identisch erfüllt sind.[1]

Als unbekannte Grössen haben wir anzusehen:

$$\textit{erstens}\ p(k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)$$

Coefficienten in den Functionen $G_0, G_1, \ldots, G_{p-1}$,

$$\textit{zweitens}\ p(m+1)-\frac{1}{2}p(p-1)(i-1)-1$$

Coefficienten in den Functionen $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$. Diese Unbekannten ergeben sich selbstverständlich nicht *eindeutig* aus den als von einander unabhängig bezeichneten Gleichungen, da die letzteren in keinem Falle lineär sind.

Die Grössen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ in dem Ausdruck $G_k[k]=(x-\tau_1)(x-\tau_2)\ldots(x-\tau_k)$, welche wir als »individuelle» Parameter des Systems (z) bezeichnet haben, sind bei dieser Reduction als »Data» anzusehen und sind der Natur der Aufgabe gemäss, keiner Beschränkung unterworfen.

Die Parameter der Differentialgleichung eines Hauptsystems zerfallen in zwei Gruppen: in solche, welche durch die Bedingungen der Verzweigung bestimmt sind, deren Anzahl $p(i+1)-1$ ist, und die übrigen. Jene $(p-1)\left|\frac{1}{2}p(i-1)-1\right|$ Parameter, welche auch nach Angabe des Indicessystems unbestimmt bleiben, wollen wir die »characteristischen» Parameter der Gleichung nennen. Das allgemeine System (z) besitzt ebensoviele characteristische Parameter, die wir aber nicht gerade als »bestimmte Coefficienten» aufzufassen brauchen.

[1] In dem besonderen Falle $p=2$, $i=2$, sind *alle* auf die obige Art erhaltenen Gleichungen von einander unabhängig. Denn es ist $\frac{1}{2}p\{p(i-1)-(i+1)\}+1=0$.

Wir können jetzt das Resultat der vorstehenden Untersuchung in dem folgenden *Satze* aussprechen:

»Ein mehrfach lineär verknüpftes Functionensystem mit einer beliebigen Anzahl beliebiger »individueller Parameter» lässt sich stets auf eine endliche Anzahl von »Hauptsystemen» derselben Art mit vorgegebenen »characteristischen» Parametern reduciren. Die »characteristischen» Parameter des zu reducirenden Systems können *nicht* willkürlich angenommen werden, sondern müssen einem gewissen Systeme simultaner nicht lineärer algebraischer Gleichungen genügen.»

5. Will man nicht gerade auf ein Hauptsystem mit *vorgegebenen* characteristischen Parametern reduciren, dann kann man sich einer einfacheren Methode bedienen, welche im Folgenden angedeutet werden soll. Sind nemlich $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{pi}$ einerseits und $z_{1i}, z_{2i}, \ldots, z_{pi}$ andererseits von einander unabhängige Zweigsysteme der Functionen y und z dann ist

$$\begin{vmatrix} z_{1i}, & \dfrac{dz_{1i}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{p-1}z_{1i}}{dx^{p-1}} \\ z_{2i}, & \dfrac{dz_{2i}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{p-1}z_{2i}}{dx^{p-1}} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ z_{pi}, & \dfrac{dz_{pi}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{p-1}z_{pi}}{dx^{p-1}} \end{vmatrix} = G_p[k] \cdot \begin{vmatrix} y_{1i}, & \dfrac{dy_{1i}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{p-1}y_{1i}}{dx^{p-1}} \\ y_{2i}, & \dfrac{dy_{2i}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{p-1}y_{2i}}{dx^{p-1}} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ y_{pi}, & \dfrac{dy_{pi}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{p-1}y_{pi}}{dx^{p-1}} \end{vmatrix}.$$

Infolge der Gleichungen (8) der vorigen Nummer erhält man also die einfache Bedingungsgleichung:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} P_0 & , P_1 & , \ldots, & P_{p-1} \\ a_{11} & , a_{12} & , \ldots, & a_{1p} \\ a_{21} & , a_{22} & , \ldots, & a_{2p} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{p-1,1} & , a_{p-1,2} & , \ldots, & a_{p-1,p} \end{vmatrix} = G_p[k].$$

Diese Gleichung, welche in Bezug auf x vom Grade pm ist, muss identisch für alle x erfüllt sein. Sie liefert also $pm + 1$ simultane Gleichungen. Aus diesen bestimmen sich:

$$pm + p - \frac{1}{2}p(p-1)(i-1)$$

Coefficienten in den Functionen $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$, und

$$(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1) - 1\right\}$$

characteristische Parameter des Systems (y), da dieselben von einander unabhängig sind.

In dem Falle der *hypergeometrischen Functionen* $\left(\begin{smallmatrix} p=2 \\ i=2 \end{smallmatrix}\right)$ wird die Zahl $(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1) - 1\right\}$ zu Null. Die Differentialgleichung des Hauptsystems ist dann:

$$(x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma]\frac{dy}{dx} + \alpha.\beta.y = 0.$$

Die Indices sind also so gewählt, dass $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ der Differentialgleichung genügt. Nach der üblichen Bezeichnung ist

$$y = y\left|\begin{array}{ccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{\infty} \\ 0, & 0, & \alpha \\ 1-\gamma, & \gamma-\alpha-\beta, & \beta \end{array}\right|.$$

Das zu reducirende System z sei gegeben durch die Characteristik:

$$z = z\left|\begin{array}{ccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{\infty} \\ 0, & 0, & \alpha - n \\ 1-\gamma, & \gamma-\alpha-\beta, & \beta - n \end{array}\right|$$

so dass also $k = 2n$. Die Gleichung (9) heisst jetzt:

$$\left|\begin{array}{cc} P_0[n], & P_1[n-1] \\ x(x-1)\left(\frac{dP_0[n]}{dx} - \alpha\beta.P_1[n-1]\right), & P_0[n] + \frac{d}{dx}\{x(x-1).P_1[n-1]\} - [(\alpha+\beta+1)x-\gamma].P_1[n-1] \end{array}\right| = 0$$

Wir wollen nur den speciellen Fall $k = 2$ weiter verfolgen. Alsdann sei:

$$P_0[1] = a + bx; \qquad P_1[0] = c; \qquad G[2] = p + qx + x^2.$$

Die Coefficienten a, b, c bestimmen sich also aus den Gleichungen:

$$(10) \qquad \left| \begin{array}{c} aa + (\gamma - 1)ac = p, \\ 2ab - (\alpha + \beta - 1)ac + \gamma bc - \alpha\beta cc = q, \\ bb - (\alpha + \beta)bc + \alpha\beta cc = 1. \end{array} \right.$$

Setzt man

$$a + \frac{1}{2}(\gamma - 1)c = x_2,$$

$$b - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)c = x_1,$$

$$-(a + b) - \frac{1}{2}(\gamma - \alpha - \beta)c = x_3,$$

dann nehmen die Gleichungen (10) die folgende symmetrische Form an:

$$x_1^2 - (\gamma - 1)^2(x_1 + x_2 + x_3)^2 = p,$$
$$x_2^2 - (\alpha - \beta)^2(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 1,$$
$$x_3^2 - (\alpha + \beta - \gamma)^2(x_1 + x_2 + x_3)^2 = p + q + 1.$$

Die Quadrate der neuen Unbekannten x_1, x_2, x_3 bestimmen sich aus Gleichungen *vierten* Grades. (Man vergl. Riemann, Werke, pag. 306.) Der Fall $k = 1$ lässt sich in ganz ähnlicher Weise behandeln.

6. Wir sind jetzt im Stande die Coefficienten der Functionen $H_0x, H_1x, \ldots, H_px$ in der Riemann'schen Fundamentalrelation:

$$(11) \qquad H_0x.y^{(0)} + H_1x.y^{(1)} + \ldots + H_px.y^{(p)} = 0$$

zu bestimmen. Wir denken uns zunächst die Indices in den einzelnen Functionen $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ derartig transformirt, dass bei der nachfolgenden Reduction auf *ein* Hauptsystem (y) die Grössen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_t$ gleich Null gesetzt werden können, wie wir oben angenommen haben. Dadurch treten an die Stelle von $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ andere ebenfalls zur selben Art gehörige Functionen $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(p)}$, welche sich von

den ursprünglichen nur um rationale Factoren unterscheiden. Die Reductionsgleichungen haben also die Form:

$$(12)\quad \left| \begin{array}{l} y^{(0)} = R_0^{(0)}x.\mathrm{y} + R_1^{(0)}x.\dfrac{d\mathrm{y}}{dx} + \ldots + R_{p-1}^{(0)}x.\dfrac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}, \\ y^{(1)} = R_0^{(1)}x.\mathrm{y} + R_1^{(1)}x.\dfrac{d\mathrm{y}}{dx} + \ldots + R_{p-1}^{(1)}x.\dfrac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(p)} = R_0^{(p)}x.\mathrm{y} + R_1^{(p)}x.\dfrac{d\mathrm{y}}{dx} + \ldots + R_{p-1}^{(p)}x.\dfrac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}. \end{array} \right.$$

In diesen Gleichungen sind die Functionen Rx in mehrdeutiger Weise vollständig bestimmt. Sie enthalten in ihren Coefficienten implicite die willkürlich angenommenen »characteristischen» Parameter $k_1, k_2, \ldots, k_\rho$ der Function (y), wo zur Abkürzung

$$\rho = (p - 1)\left[\frac{1}{2}p(i - 1) - 1\right]$$

gesetzt ist.

Eliminirt man nun aus den $p + 1$ Gleichungen (12) die Grössen

$$\mathrm{y}, \frac{d\mathrm{y}}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}$$

dann erhält man eine Relation von der Form der Gleichung (11).

Die »characteristischen» Parameter der Functionen $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ sind hierbei natürlich nicht willkürlich, sondern vielmehr Functionen der Parameter $k_1, k_2, \ldots, k_\rho$. Die Mannigfaltigkeit der Relationen (11), welche zu denselben erzeugenden Substitutionen gehören, ist daher von der Dimension $q.\rho$, wenn ρ die obige Bedeutung hat und q eine bestimmte endliche Zahl bezeichnet.

Die explicite Darstellung der Coefficienten in den Functionen H_0x, $H_1x, \ldots, H_px$ ist nur in den einfachsten Fällen möglich. Dieser Umstand beeinträchtigt jedoch unsere Theorie keineswegs, da die Schwierig-

keiten im Gebiete der Algebra liegen. Wir können also die Aufgabe, welche wir uns gestellt haben als »im Allgemeinen» erledigt betrachten. Dass eine eingehende Untersuchung der bei unserem Verfahren auftretenden Systeme algebraischer Gleichungen für die Theorie der Functionensysteme *derselben Art* von grosser Wichtigkeit sein würde, ist selbstverständlich.

7. Zum Schluss will ich noch den Zusammenhang darlegen, welcher zwischen den independenten Invarianten der erzeugenden Substitutionen einer mehrfach lineär verknüpften Function und ihren »individuellen» Parametern besteht. Für ein »reducirtes» System[1] nimmt Herr POINCARÉ (Acta Mathematica, Bd. 4, p. 205) $(p^2 - 1)(i - 1)$ independente Invarianten an, d. h. ebensoviele als die erzeugenden Substitutionen independente Coefficienten enthalten. Die Periodicität der p-fach lineär verknüpften Functionen wird nemlich bestimmt:

erstens durch $p^2 i$ Coefficienten in den Substitutionen

$$\mathfrak{B}_1\,,\ \mathfrak{B}_2\,,\ \ldots\,,\ \mathfrak{B}_{\iota-1}\,,\ \mathfrak{B}_{\iota+1}\,,\ \ldots\,,\ \mathfrak{B}_{i+1}$$

zweitens durch p Coefficienten in der Substitution $\mathfrak{B}_\iota$.

Von den ersten $p^2 i$ Coefficienten können jedoch p beliebige gleich Eins gesetzt werden, da irgend welche p Initialzweige willkürliche Factoren erhalten können. Ferner sind die $p^2 i$ insoweit unbestimmten Coefficienten infolge der Gleichung (1) [N° 1] noch $p^2 - 1$ von einander unabhängigen Bedingungen unterworfen. Beachtet man endlich noch die Gleichungen:

$$\mathrm{Det.}\,\mathfrak{B}_1 = \mathrm{Det.}\,\mathfrak{B}_2 = \ldots = \mathrm{Det.}\,\mathfrak{B}_i = 1$$

dann bleiben $(p^2 - 1)(i - 1)$ Coefficienten unbestimmt.

Denken wir uns nun eine allgemeine p-fach lineär verknüpfte Function z durch ein Hauptsystem mit vorgegebenen »characteristischen» Pa-

[1] Man beachte, dass den Bedingungen $\mathrm{Det.}\,\mathfrak{B}_1 = \mathrm{Det.}\,\mathfrak{B}_2 = \ldots = \mathrm{Det.}\,\mathfrak{B}_i$ noch *keineswegs* eine Differentialgleichung entsprechen muss, in welcher das Glied $F_{p-1}\cdot\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}$ ausfällt, obwohl diese den Substitutionen auferlegte Bedingungen die Zahl der independenten Invarianten wesentlich beeinflussen. (Man vergl. Acta Mathematica, Bd. 4, p. 202.)

rametern ausgedrückt und darauf jenes Hauptsystem in ein »reducirtes« übergeführt, dann ist die Function z wesentlich determinirt

erstens durch $(p-1)\left[\frac{1}{2}p(i-1)-1\right]$ »characteristische» Parameter,

zweitens durch $p(i+1)-(i+1)$ Parameter, welche durch die Bedingungen der Verzweigung bestimmt sind,

drittens durch i endliche Verzweigungspunkte,

viertens durch k »individuelle» Parameter.

Von den i endlichen Verzweigungspunkten kann man zweien die willkürlichen Zahlwerthe 0 und 1 beilegen, so dass nur $i-2$ allgemein bleiben.

Damit jene

$$\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)+p+k-2$$

allgemeinen Bestimmungsstücke den $(p^2-1)(i-1)$ independenten Invarianten entsprechen, muss

$$k=\left[\frac{1}{2}p(p-1)-1\right]i-\left[\frac{1}{2}p(p+1)-3\right]$$

sein. Es ist also

für $p=2$ die Zahl $k=0$ für *jeden* Werth von i;

für $p=3$ die Zahl $k=2i-3$;

für $p=4$ die Zahl $k=5i-7$; etc

Allgemein gilt der *Satz:*

»Sollen die Definitionen der mehrfach lineär verknüpften Functionen durch die independenten Invarianten der erzeugenden Substitutionen einerseits und ihre Differentialgleichung andererseits äquivalent sein (d. h. gleichviele von einander unabhängige Bestimmungsstücke enthalten), dann muss man den betreffenden Functionen im Allgemeinen eine gewisse Anzahl »individueller» Parameter zu-

ertheilen, es sei denn dass die Differentialgleichung von der *zweiten* Ordnung wäre.»

Einen ganz analogen Satz hat Herr Poincaré (Acta Mathematica, Bd. 4, p. 219) aufgestellt. Nur treten dort an Stelle der »individuellen» Parameter »ausserwesentlich singuläre Punkte» (points à apparence singulière). Dieser Unterschied könnte, in gewissem Sinne, irrelevant erscheinen, da die individuellen Parameter stets als ausserwesentlich singuläre Stellen aufzufassen sind. Man beachte jedoch, dass das Umgekehrte, im Allgemeinen, keineswegs statthaft ist.

Einbeck 21. Aug. 1887.

EINE EIGENSCHAFT DER PRIMZAHL 107

VON

K. SCHWERING
in COESFELD.

In meinem Aufsatze *Über gewisse trinomische komplexe Zahlen*[1] habe ich auf die Primzahl 107 als für eine Frage der Zahlentheorie »zur Untersuchung einladend» hingewiesen. Ich bin nunmehr in der Lage, die dort (Seite 84, Fussnote) gemachten Mitteilungen zu vervollständigen und mit Hülfe des ganzen Ergebnisses die Frage:

»Ist es *immer* möglich, die von Jacobi mit $(\alpha\,,\,x)^\lambda$ bezeichneten Kreisteilungsausdrücke als Produkte konjugirter ψ-Funktionen darzustellen?»

durch ein *zweites* Beispiel in *verneinendem* Sinne zu beantworten.

Nimmt man als *primitive Wurzel* 2, so erhalten wir die folgenden 18 Zahlen:

$$1 + \alpha + \alpha^r \quad \text{für} \quad r = 4,\ 31,\ 47,\ 50;$$

ferner:

$$1 + \alpha - \alpha^r \quad \text{für} \quad r = 43,\ 50,\ 35,\ 30,\ 32,\ 17,\ 17,\ 38,\ 41,\ 7,\ 51,\ 47,\ 22;$$

endlich:

$$2 + \alpha,$$

deren Normen unter der Voraussetzung $\alpha^{53} = 1$ zu bilden sind. Zunächst tritt $r = 17$ zweimal auf; dann ist nach Formel 25 obiger Abhandlung:

$$N(1 + \alpha + \alpha^{50}) = N(1 + \alpha + \alpha^4), \qquad N(1 + \alpha - \alpha^{47}) = N(1 + \alpha - \alpha^7),$$

$$N(1 + \alpha - \alpha^{22}) = N(1 + \alpha - \alpha^{32}).$$

[1] Diese Zeitschrift, Bd. 10, S. 57 ff.

Für die übrigen erhält man:

$N(1+\alpha+\alpha^{4}) = 107.181579$, $N(1+\alpha+\alpha^{31}) = 107.76003$,

$N(1+\alpha+\alpha^{17}) = 107.118297$, $N(1+\alpha-\alpha^{43}) = 107.151051$,

$N(1+\alpha-\alpha^{50}) = 107.243589$, $N(1+\alpha-\alpha^{35}) = 107.246769$,

$N(1+\alpha-\alpha^{30}) = 107.73459$, $N(1+\alpha-\alpha^{32}) = 107.107.7103$,

$N(1+\alpha-\alpha^{17}) = 107.107.1061$, $N(1+\alpha-\alpha^{38}) = 107.191119$,

$N(1+\alpha-\alpha^{41}) = 107.27773$, $N(1+\alpha-\alpha^{7}) = 107.107.3181$,

$N(1+\alpha-\alpha^{51}) = 107.27773$.

Endlich

$$N(2+\alpha) = 3.107.28059810762433.$$

Die Gleichheit der Normen $N(1+\alpha-\alpha^{41}) = N(1+\alpha-\alpha^{51})$ ist bemerkenswert, da die Zahlen 41 und 51 *verschiedenen* Gruppen (obige Abhandl. S. 69) nämlich $\mu = 4$ und $\mu = 2$ angehören.

In der oben erwähnten Fussnote heisst es durch einen Druckfehler $1+\alpha-\alpha^4$ statt $1+\alpha+\alpha^4$, wie oben angegeben.

Ich benutze die Gelegenheit zu der ferneren Mitteilung über die Normen $N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1})$, wo $\alpha^\lambda = 1$, λ reelle Primzahl und μ eine beliebige ganze Zahl ist. In den zahlreichen von mir berechneten Beispielen war der Koefficient jeder *geraden* Potenz von z, also der Koefficient von z^2, z^4, z^6, u. s. w. stets entweder *Null* oder eine *positive* Zahl.

Im September 1887.

ON THE DIVISION OF SPACE WITH MINIMUM PARTITIONAL AREA

BY

Sir WILLIAM THOMSON

in GLASGOW.

1. This problem is solved in foam, and the solution is interestingly seen in the multitude of film-enclosed cells obtained by blowing air through a tube into the middle of a soap-solution in a large open vessel. I have been led to it by endeavours to understand, and to illustrate, GREEN's theory of »extraneous pressure» which gives, for light traversing a crystal, FRESNEL's wave-surface, with FRESNEL's supposition (strongly supported as it is by STOKES and RAYLEIGH) of velocity of propagation dependent, not on the distortion-normal, but on the line of vibration. It has been admirably illustrated, and some elements towards its solution beautifully realized in a manner convenient for study and instruction, by PLATEAU, in the first volume of his *Statique des Liquides soumis aux seules Forces Moléculaires.*

2. The general mathematical solution, as is well known, is that every interface between cells must have constant curvature[1] throughout, and that where three or more interfaces meet in a curve or straight line their tangent-planes through any point of the line of meeting intersect at angles such that equal forces in these planes, perpendicular to their line of intersection, balance. The *minimax* problem would allow any

[1] By »curvature» of a surface I mean sum of curvatures in mutually perpendicular normal sections at any point; not GAUSS's »curvatura integra», which is the product of the curvature in the two »principal normal sections», or sections of greatest and least curvature. (See THOMSON and TAIT's *Natural Philosophy*, part i. §§ 130, 136.)

number of interfaces to meet in a line; but for a pure minimum it is obvious that not more than three can meet in a line, and that therefore, in the realization by the soap-film, the equilibrium is necessarily unstable if four or more surfaces meet in a line. This theoretical conclusion is amply confirmed by observation, as we see at every intersection of films, whether interfacial in the interior of groups of soap-bubbles, large or small, or at the outer bounding-surface of a group, never more than three films, but, wherever there is intersection, always *just three films,* meeting in a line. The theoretical conclusion as to the angles for stable equilibrium (or pure minimum solution of the mathematical problem) therefore becomes, simply, that every angle of meeting of film-surfaces is exactly 120°.

3. The rhombic dodecahedron is a polyhedron of plane sides between which every angle of meeting is 120°; and space can be filled with (or divided into) equal and similar rhombic dodecahedrons. Hence it might seem that the rhombic dodecahedron is the solution of our problem for the case of all the cells equal in volume, and every part of the boundary of the group either infinitely distant from the place considered, or so adjusted as not to interfere with the homogeneousness of the interior distribution of cells. Certainly the rhombic dodecahedron *is a solution of the minimax, or equilibrium-problem;* and certain it is that no other plane-sided polyhedron can be a solution.

4. But it has seemed to me, on purely theoretical consideration, that the tetrahedral angles of the rhombic dodecahedron,[1] giving, when

---

[1] The rhombic dodecahedron has six tetrahedral angles and eight trihedral angles. At each tetrahedral angle the plane faces cut one another successively at 120°, while each is perpendicular to the one remote from it; and the angle between successive edges is $\cos^{-1}\frac{1}{3}$, or 70° 32′. The obtuse angles (109° 28′) of the rhombs meet in the trihedral angles of the solid figure. The whole figure may be regarded as composed of six square pyramids, each with its alternate slant faces perpendicular to one another, placed on six squares forming the sides of a cube. The long diagonal of each rhombic face thus made up of two sides of pyramids conterminous in the short diagonal, is $\sqrt{2}$ times the short diagonal.

space is divided into such figures, twelve plane films meeting in a point (as twelve planes from the twelve edges of a cube meeting in the centre of the cube) are essentially unstable. That it is so is proved experimentally by PLATEAU (vol. i. § 182, fig. 71) in his well-known beautiful experiment with his cubic skeleton frame dipped in soap-solution and taken out. His fig. 71 is reproduced here in fig. 1. Instead of twelve *plane* films stretched inwards from the twelve edges and meeting in the centre of the cube, it shows twelve films, of which eight are slightly curved and four are plane,[1] stretched from the twelwe edges to a small central plane quadrilateral film with equal curved edges and four angles each of 109° 28′. Each of the plane films is an isosceles triangle with two equal curved sides meeting at a corner of the central curvilinear square in a plane perpendicular to its plane. It is in the plane through an edge and the centre of the cube. The angles of this plane curvilinear triangle are respectively 109° 28′, at the point of meeting of the two curvilinear sides: and each of the two others half of this, or 54° 44′.

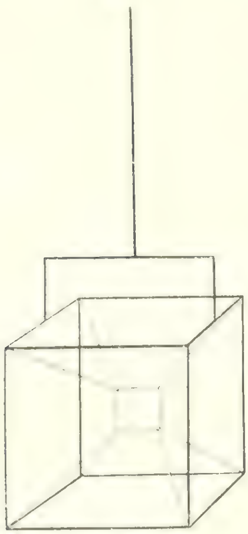
5. I find that by blowing gently upon the PLATEAU cube into any one of the square apertures through which the little central quadrilateral film is seen as a line, this film is caused to contract. If I stop blowing before this line contracts to a point, the film springs back to its primitive size and shape. If I blow still very gently but for a little more time, the quadrilateral contracts to a line, and the twelve films meeting in it immediately draw out a fresh little quadrilateral film similar to the former, but in a plane perpendicular to its plane and to the direction of the blast. Thus, again and again, may the films be transformed so as to render the little central curvilinear square parallel to one or other of the three pairs of square apertures of the cubic frame. Thus we see that the twelve plane films meeting in the centre of the cube is a configuration of unstable equilibrium which may be fallen from in three different ways.

6. Suppose now space to be filled with equal and similar ideal

[1] I see it inadvertently stated by PLATEAU that all the twelve films are »légèrement courbées».

rhombic dodecahedrons. Draw the short diagonal of every rhombic face, and fix a real wire (infinitely thin and perfectly stiff) along each. This fills space with Plateau cubic frames. Fix now, ideally, a very small rigid globe at each of the points of space occupied by tetrahedral angles of the dodecahedrons, and let the faces of the dodecahedrons be realized by soap-films. They will be in *stable* equilibrium, because of the little fixed globes; and the equilibrium would be stable without the rigid diagonals which we require only to help the imagination in what follows. Let an exceedingly small force, like gravity,[1] act on all the films everywhere perpendicularly to one set of parallel faces of the cubes. If this force is small enough it will not tear away the films from the globes; it will only produce a very slight bending from the plane rhombic shape of each film. Now annul the little globes. The films will instantly jump (each set of twelve which meet in a point) into the Plateau configuration (fig. 1), with the little curve-edged square in the plane perpendicular to the determining force, which may now be annulled, as we no longer require it. The rigid edges of the cubes may also be now annulled, as we have done with them also; because each is (as we see by symmetry) pulled with equal forces in opposite directions, and therefore is not required for the equilibrium, and it is clear that the equilibrium is stable without them.[2]

Fig. 1.



[1] To do for every point of meeting of twelve films what is done by blowing in the experiment of § 5.

[2] The corresponding two-dimensional problem is much more easily imagined; and may probably be realized by aid of moderately simple appliances.

Between a level surface of soap-solution and a horizontal plate of glass fixed at a centimetre or two above it, imagine vertical film-partitions to be placed along the sides of the squares indicated in the drawing (fig. 2): these will rest in stable equilibrium if thick enough wires are fixed vertically through the corners of the squares. Now draw away these wires downwards into the liquid: the equilibrium in the square formation becomes unstable, and the films instantly run into the hexagonal formation shown in the diagram;

7. We have now space divided into equal and similar tetrakaidecahedral cells by the soap-film; each bounded by

1) Two small plane quadrilaterals parallel to one another;

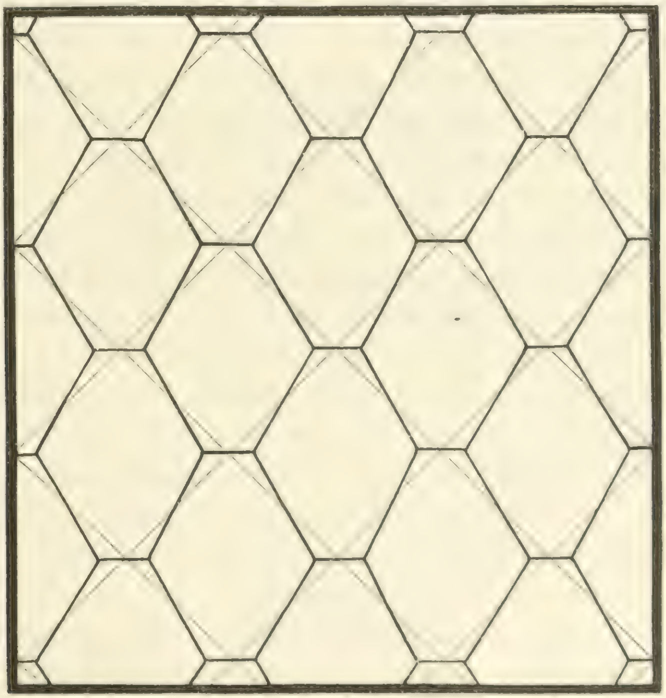
2) Four large plane quadrilaterals in planes perpendicular to the diagonals of the small ones;

3) Eight non-plane hexagons, each with two edges common with the small quadrilaterals, and four edges common with the large quadrilaterals.

---

provided the square of glass is furnished with vertical walls (for which slips of wood are convenient), as shown in plan by the black border of the diagram. These walls are necessary to maintain the inequality of pull in different directions which the inequality of the sides of the hexagons implies. By inspection of the diagram we see that the pull is

Fig. 2.



T/a per unit area on either of the pair of vertical walls which are perpendicular to the short sides of the hexagons; and on either of the other pair of walls $2 \cos 30^\circ \times T/a$; where T denotes the pull of the film per unit breadth, and a the side of a square in the original formation. Hence the ratio of the pulls per unit of area in the two principal directions is as 1 to 1·732.

The films seen in the PLATEAU cube show one complete small quadrilateral, four halves of four of the large quadrilaterals, and eight halves of eight of the hexagons, belonging to six contiguous cells; all mathematically correct in every part (supposing the film and the cube-frame to be infinitely thin). Thus we see all the elements required for an exact construction of the complete tetrakaidecahedron. By making a clay model of what we actually see, we have only to complete a symmetrical figure by symmetrically completing each half-quadrilateral and each half-hexagon, and putting the twelve properly together, with the complete small quadrilateral, and another like it as the far side of the 14-faced figure. We thus have a correct solid model.

8. Consider now a cubic portion of space containing a large number of such cells, and of course a large, but a comparatively small, number of partial cells next the boundary. Wherever the boundary is cut by film, fix stiff wire; and remove all the film from outside, leaving the cubic space divided stably into cells by films held out against their tension by the wire network thus fixed in the faces of the cube. If the cube is chosen with its six faces parallel to the three pairs of quadrilateral films, it is clear that the resultant of the whole pull of film on each face will be perpendicular to the face, and that the resultant pulls on the two pairs of faces parallel to pairs of the greater quadrilaterals are equal to one another and less than the resultant pull on the pair of faces parallel to the smaller quadrilaterals. Let now the last-mentioned pair of faces of the cube be allowed to yield to the pull inwards, while the other two pairs are dragged outwards against the pulls on them, so as to keep the enclosed volume unchanged; and let the wirework fixture on the faces be properly altered, shrunk on two pairs of faces, and extended on the other pair of faces, of the cube, which now becomes a square cage with distance between floor and ceiling less than the side of the square. Let the exact configuration of the wire everywhere be always so adjusted that the cells throughout the interior remain, in their altered configuration, equal and similar to one another. We may thus diminish, and if we please annul, the difference of pull per unit area on the three pairs of sides of the cage. The respective shrinkage-ratio and extension-ratio, to exactly equalize the pulls per unit

area on the three principal planes, (and therefore on all planes), are $2^{-\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{1}{6}}$, $2^{\frac{1}{6}}$, as is easily seen from what follows.

9. While the equalization of pulls in the three principal directions is thus produced, work is done by the film on the moving wire-work of the cage, and the total area of film is diminished by an amount equal to W/T, if W denote the whole work done, and T the pull of the film per unit breadth. The change of shape of the cage being supposed to be performed infinitely slowly, so that the film is always in equilibrium throughout, the total area is at each instant a minimum, subject to the conditions

1) That the volume of each cell is the given amount;
2) That every part of the wire has area edged by it; and
3) That no portion of area has any free edge.

10. Consider now the figure of the cell (still of course a tetrakaidecahedron) when the pulls in the three principal directions are equalized, as described in § 8. It must be perfectly isotropic in respect to these three directions. Hence the pair of small quadrilaterals must have become enlarged to equality with the two pairs of large ones, which must have become smaller in the deformational process described in § 8. Of each hexagon three edges coincide with edges of quadrilateral faces of one cell; and each of the three others coincides with edges of three of the quadrilaterals of one of the contiguous cells. Hence the 36 edges of the isotropic tetrakaidecahedron are equal and similar plane arcs; each of course symmetrical about its middle point. Every angle of meeting of edges is essentially 109° 28′ (to make trihedral angles between tangent planes of the films meeting at 120°). Symmetry shows that the quadrilaterals are still plane figures; and therefore, as each angle of each of them is 109° 28′, the change of direction from end to end of each arc-edge is 19° 28′. Hence each would be simply a circular arc of 19° 28′, if its curvature were equal throughout; and it seems from the complete mathematical investigation of §§ 16, 17, 18 below, that it is nearly so, but not exactly so even to a first approximation.

Of the three films which meet in each edge, in three adjacent cells, one is quadrilateral and two are hexagonal.

11. By symmetry we see that there are three straight lines in each (non-plane) hexagonal film, being its three long diagonals; and that these three lines, and therefore the six angular points of the hexagon, are all in one plane. The arcs composing its edges are not in this plane, but in planes making, as we shall see (§ 12), angles of 54° 44′ with it. For three edges of each hexagon, the planes of the arcs bisect the angle of 109° 28′ between the planes of the six corners of contiguous hexagons; and for the other three edges are inclined on the outside of its plane of corners, at angles equal to the supplements of the angles of 125° 16′ between its plane of corners and the planes of contiguous quadrilaterals.

12. The planes of corners of the eight hexagons constitute the faces of an octahedron which we see, by symmetry, must be a regular octahedron (eight equilateral triangles in planes inclined 109° 28′ at every common edge). Hence these planes, and the planes of the six quadrilaterals, constitute a plane-faced tetrakaidecahedron obtained by truncating the six corners[1] of a regular octahedron each to such a depth as to reduce its eight original (equilateral triangular) faces to equilateral equiangular hexagons. An orthogonal projection of this figure is shown in fig. 3. It is to be remarked that space can be filled with such figures. For brevity we shall call it a plane-faced isotropic tetrakaidecahedron.

Fig. 3.

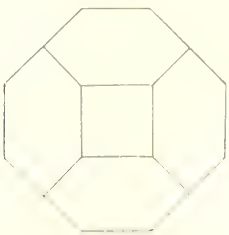
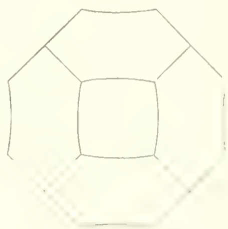


Fig. 4.



13. Given a model of the plane-faced isotropic tetrakaidecahedron, it is easy to construct approximately a model of the *minimal tetrakaidecahedron,* thus: — Place on each of the six square faces a thin plane disk having the proper curved arcs of 19° 28′ for its edges. Draw the

[1] This figure (but with probably indefinite extents of the truncation) is given in books on mineralogy as representing a natural crystal of red oxide of copper.

three long diagonals of each hexagonal face. Fill up by little pieces of wood, properly cut, the three sectors of 60° from the centre to the overhanging edges of the adjacent quadrilaterals. Hollow out symmetrically the other three sectors, and the thing is done. The result is shown in orthogonal projection, so far as the edges are concerned, in fig. 4; and as the orthogonal projections are equal and similar on three planes at right angles to one another, this diagram suffices to allow a perspective drawing from any point of view to be made by »descriptive geometry».

14. No shading could show satisfactorily the delicate curvature of the hexagonal faces, though it may be fairly well seen on the solid model made as described in § 12. But it is shown beautifully, and illustrated in great perfection, by making a skeleton model of 36 wire arcs for the 36 edges of the complete figure, and dipping it in soap solution to fill the faces with film, which is easily done for all the faces but one. The curvature of the hexagonal film on the two sides of the plane of its six long diagonals is beautifully shown by reflected light. I have made these 36 arcs by cutting two circles, 6 inches diameter, of stiff wire, each into 18 parts of 20° (near enough to 19° 28′). It is easy to put them together in proper positions and solder the corners, by aid of simple devices for holding the ends of the three arcs together in proper positions during the soldering. The circular curvature of the arcs is not mathematically correct, but the error due to it is, no doubt, hardly perceptible to the eye.

15. But the true form of the curved edges of the quadrilateral plane films, and of the non-plane surfaces of the hexagonal films, may be shown with mathematical exactness by taking, instead of Plateau's skeleton cube, a skeleton square cage with four parallel edges each 4 centimetres long: and the other eight, constituting the edges of two squares, each $\sqrt{2}$ times as long, or 5·66 centim. Dipped in soap-solution and taken out it always unambiguously gives the central quadrilateral in the plane perpendicular to the four short edges. It shows with mathematical accuracy (if we suppose the wire edges infinitely thin) a complete quadrilateral, four half-quadrilaterals, and four half-hexagons of the minimal

tetrakaidecahedron. The two principal views are represented in figs. 5 and 6.

Fig. 5.

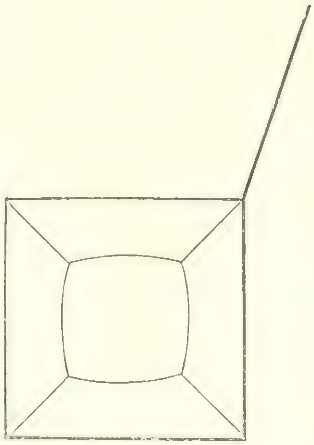
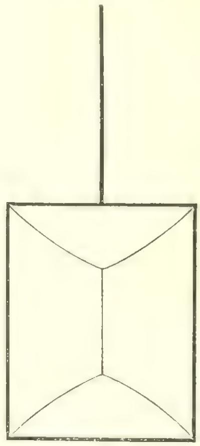
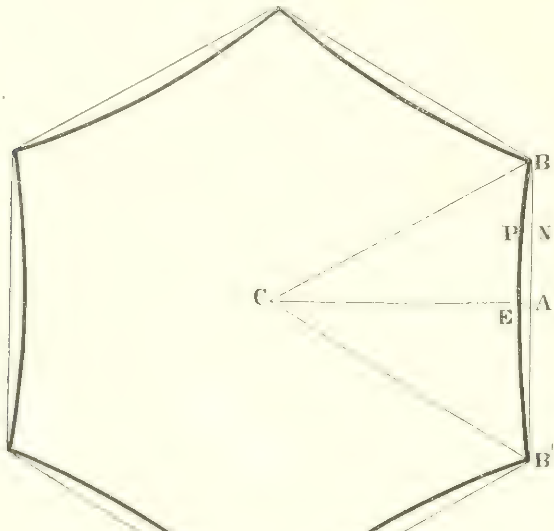


Fig. 6.



16. The mathematical problem of calculating the forms of the plane arc-edges, and of the curved surface of the hexagonal faces, is easily carried out to any degree of approximation that may be desired;

Fig. 7.



though it would be very laborious, and not worth the trouble, to do so further than a first approximation, as given in § 17 below. But first let us state the rigorous mathematical problem; which by symmetry becomes narrowed to the consideration of a 60° sector BCB' of our non-plane hexagon, bounded by straight lines CB, CB' and a slightly curved edge BEB', in a plane, Q, through BB', inclined to the plane BCB' at an angle of $\tan^{-1}\sqrt{2}$, or 54° 44′. The plane of the curved edge I call Q, because it is the plane of the contiguous quadrilateral. The mathematical problem to be solved is *to find the surface of zero curvature edged by BCB' and cutting at* 120° *the plane Q all along the intersectional curve* (fig. 7). It is obvious that this problem is determinate and has only one solution. Taking CA for axis of x; and z perpendicular to the plane BCB': and regarding z as a function of x, y, to be determined for finding the form of the surface, we have, as the analytical expression of the conditions

$$\frac{d^2z}{dx^2}\left(1+\frac{dz^2}{dy^2}\right)-2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx\,dy}+\frac{d^2z}{dy^2}\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)=0; \tag{1}$$

and

$$\left|\begin{array}{c}\left(1+\dfrac{dz^2}{dx^2}+\dfrac{dz^2}{dy^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\dfrac{dz}{dx}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=\dfrac{1}{2}\\ \text{when } z=(a-x)\sqrt{2}.\end{array}\right. \tag{2}$$

17. The required surface deviates so little from the plane BCB' that we get a good approximation to its shape by neglecting dz^2/dx^2, $dz/dx \,.\, dz/dy$, and dz^2/dy^2, in (1) and (2), which thus become

$$\nabla^2 z = 0, \tag{3}$$

and

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{3}{8}}=\cdot 094734, \quad \text{when } x=a-\frac{z}{\sqrt{2}}, \tag{4}$$

∇^2 denoting $(d/dx)^2+(d/dy)^2$. The general solution of (3), in polar coordinates (r, φ) for the plane (x, y), is

$$\Sigma(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)r^m, \tag{5}$$

where A, B, and m are arbitrary constants. The symmetry of our problem requires $B = 0$, and $m = 3 . (2i + 1)$, where i is any integer. We shall not take more than two terms. It seems not probable that advantage could be gained by taking more than two, unless we also fall back on the rigorous equations (1) and (2), keeping dz^2/dx^2 &c. in the account, which would require each coefficient A to be not rigorously constant but a function of r. At all events we satisfy ourselves with the approximation yielded by two terms, and assume

$$(6) \qquad z = Ar^3 \cos 3\varphi + A'r^9 \cos 9\varphi$$

with two coefficients A, A' to be determined so as to satisfy (4) for two points of the curved edge, which, for simplicity, we shall take as its middle, $E(\varphi = 0)$; and end, $B(\varphi = 30°)$. Now remark that, as z is small, even at E, where it is greatest, we have, in (4), $x \doteq a$ or $r \doteq a \sec \varphi$. Thus, and substituting for dz/dx its expression in polar (r, φ) coordinates, which is

$$(7) \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr} \cos \varphi - \frac{dz}{rd\varphi} \sin \varphi,$$

we find, from (4) with (6),

$$(8) \qquad \text{(by case } \varphi = 0) \qquad A + 3a^6 A' = \cdot 031578 a^{-2},$$

$$(9) \qquad \text{(and by case } \varphi = 30°) \qquad A - \frac{64}{9} a^6 A' = \cdot 031578 . \tfrac{3}{2} . a^{-2};$$

whence

$$A' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{91} \times \cdot 031578 . a^{-8} = -9 \times \cdot 0001735 . a^{-8}$$

$$= - \cdot 001561 . a^{-8},$$

$$A = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{64}{91}\right) \times \cdot 031578 . a^{-2} = 209 \times \cdot 0001735 . a^{-2}$$

$$= \cdot 03626 . a^{-2};$$

and for required equation of the surface we have (taking $a = 1$ for brevity)

$$(10)\qquad \begin{cases} z = \cdot 03626 \,.\, r^3 \cos 3\varphi - \cdot 001561\, r^9 \cos 9\varphi \\ \quad = \cdot 03626 \,.\, r^3 (\cos 3\varphi - \cdot 043 \,.\, r^6 \cos 9\varphi). \end{cases}$$

18. To find the equation of the curved edge BEB', take, as in (4),

$$(11)\qquad x = 1 - \frac{z}{\sqrt{2}} = 1 - \xi, \quad \text{where } \xi \text{ denotes } \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

Substituting in this, for z, its value by (10), with for r its approximate value $\sec\varphi$, we find

$$(12)\qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cdot 03626 \sec^3\varphi \cos 3\varphi - \cdot 001561 \sec^9\varphi \cos 9\varphi)$$

as the equation of the orthogonal projection of the edge, on the plane BCB', with

$$(13)\qquad AN = y = \tan\varphi; \quad \text{and} \quad NP = \xi.$$

The diagram was drawn to represent this projection roughly, as a circular arc, the projection on BCB' of the circular arc of 20° in the plane Q, which, before making the mathematical investigation, I had taken as the form of the arc-edges of the plane quadrilaterals. This would give 1/35 of CA, for the sagitta, AE; which we now see is somewhat too great. The equation (12), with $y = 0$, gives for the sagitta

$$(14)\qquad AE = \cdot 0245 \times CA,$$

or, say, 1/41 of CA. The curvature of the projection at any point is to be found by expressing $\sec^3\varphi \cos 3\varphi$ and $\sec^9\varphi \cos 9\varphi$ in terms of $y = \tan\varphi$ and taking d^2/dy^2 of the result.

By taking $\sqrt{3/2}$ instead of $\sqrt{1/2}$ in (12), we have the equation of the arc itself in the plane Q.

19. To judge of the accuracy of our approximation, let us find the greatest inclination of the surface to the plane BCB'. For the tangent of the inclination, at (r, φ) we have

$$(15)\qquad \left(\frac{dz^2}{dr^2} + \frac{dz^2}{r^2 d\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \cdot 1088 \,.\, r^2 (1 - 2 \times \cdot 129 \,.\, r^6 \cos 6\varphi + \cdot 129^2 r^{12})^{\frac{1}{2}}.$$

The greatest values of this will be found at the curved bounding edge, for which $r = \sec\varphi$. Thus we find

$$(16) \qquad \left(\frac{dz^2}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{dz^2}{d\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left|\begin{array}{l} \cdot 0948, \text{ and therefore inclination } = 5^\circ 25' \text{ at } E \\ \cdot 1894, \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad = 10^\circ 44' \text{ at } B. \end{array}\right|$$

Hence we see that the inaccuracy due to neglecting the square of the tangent of the inclination in the mathematical work cannot be large. The exact value of the inclination at E is $\tan^{-1}(-\sqrt{2}) - 120^\circ$, or $5^\circ\ 16'$, which is less by $9'$ than its value by (16).

SUR UN MODE DE TRANSFORMATION DES SURFACES MINIMA

PAR

E. GOURSAT

À PARIS.

1. En interprétant géométriquement les formules de MONGE, M. SOPHUS LIE a rattaché la théorie des surfaces minima à celle des courbes dont les tangentes vont rencontrer le cercle de l'infini, et auxquelles il a donné le nom de *courbes minima.*[1] Bornons-nous d'abord, pour plus de netteté, aux surfaces réelles; il résulte des recherches de M. LIE que la surface minima réelle la plus générale peut être considérée comme le lieu du milieu d'une corde qui joint un point quelconque d'une courbe minima à un point quelconque de la courbe conjuguée.

Soient

$$X = A(t), \qquad Y = B(t), \qquad Z = C(t) \tag{1}$$

les équations d'une courbe minima Γ, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ désignant trois fonctions du paramètre variable t qui vérifient la relation

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0.$$

Les coordonnées d'un point *réel* de la surface minima *réelle* correspondante S seront données par les formules

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \Re A(t), \\ y &= \Re B(t), \\ z &= \Re C(t), \end{aligned} \right. \tag{2}$$

[1] S. LIE. *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen:* I. *Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (Mathematische Annalen, t. **14**, p. 331; 1878). — II. *Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (même recueil t. **15**, p. 465; 1879).

le signe $\Re$ indiquant que l'on prend seulement la partie réelle d'une quantité imaginaire; comme t est une variable complexe, les coordonnées x, y, z dépendent bien, comme cela doit être, de deux paramètres réels.

Imaginons maintenant que l'on applique à la courbe minima Γ une transformation qui la change en une nouvelle courbe minima; à cette nouvelle courbe correspondra une autre surface minima réelle dont les relations avec la première surface seront plus ou moins simples, suivant le mode de transformation adopté. Or, parmi les transformations qui changent une courbe minima en une autre courbe minima, il n'en est pas de plus simples que les transformations homographiques qui conservent le cercle de l'infini. Toute transformation de cette nature est équivalente, comme on sait, à une combinaison des trois opérations suivantes: 1° une translation; 2° une transformation homothétique à pôle réel et à module réel ou imaginaire; 3° un déplacement autour d'un point réel. Si on imprime à la courbe Γ une translation dont les composantes suivant les axes soient h, k, l, les coordonnées x, y, z de la surface S seront augmentées respectivement des quantités

$$\Re h\,,\ \Re k\,,\ \Re l\,,$$

et la surface aura subi elle-même une translation. La seconde opération a été étudiée en détail; elle donne les surfaces homothétiques des surfaces *associées* à la première.[1] En ce qui concerne les rotations, il y a lieu de distinguer les rotations réelles des rotations imaginaires. Si on applique à une courbe minima une rotation réelle, il est facile de démontrer que la surface minima réelle correspondante subit la même rotation. Il ne reste donc plus qu'à étudier les surfaces que l'on obtient en appliquant à une même courbe minima des rotations imaginaires, et je ne connais sur ce sujet que quelques indications données par M. Lie dans le second Mémoire déjà cité.[2] Le présent travail est consacré à l'étude de ce mode de transformation. Je supposerai toujours qu'on a pris pour origine des coordonnées le point réel autour duquel s'effectue le déplacement.

---

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. **1**, p. 322 et 457; 1887.
[2] Mathematische Annalen, t. **15**, p. 475.

2. Rappelons d'abord la représentation analytique des rotations qui a son origine dans les travaux de RIEMANN et qui a été développée complètement par M. KLEIN. Soient α, β, γ les coordonnées rectangulaires d'un point de la sphère

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \tag{3}$$

on emploie, pour fixer la position de ce point sur la sphère, un nouveau système de coordonnées défini de la manière suivante. La sphère étant une surface du second ordre, on sait que par chaque point passent deux génératrices rectilignes. Ces deux systèmes de génératrices sont déterminés respectivement par les équations

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma} &= \frac{1 + \gamma}{\alpha - i\beta} = u, \\ \frac{\alpha - i\beta}{1 - \gamma} &= \frac{1 + \gamma}{\alpha + i\beta} = -\frac{1}{v}; \end{aligned} \tag{4}$$

nous prendrons u et v pour nouvelles coordonnées du point (α, β, γ) de la sphère. Quand on décrit une génératrice rectiligne, une de ces coordonnées conserve une valeur constante. Des formules (4) on tire inversement:

$$\alpha = \frac{1 - uv}{u - v}, \qquad \beta = i\frac{1 + uv}{u - v}, \qquad \gamma = \frac{u + v}{u - v}. \tag{5}$$

Cela posé, on sait que tout déplacement de la sphère autour de son centre est caractérisé par une certaine substitution linéaire effectuée simultanément sur u et sur v,[1]

$$u = \frac{mu_1 + n}{pu_1 + q}, \qquad v = \frac{mv_1 + n}{pv_1 + q}. \tag{6}$$

Cherchons s'il existe des points réels de la sphère qui viennent coïncider après la rotation avec des points réels. Remarquons pour cela que, si un point de coordonnées (u, v) est réel, u et $-\frac{1}{v}$ sont conjuguées et réciproquement; cela résulte immédiatement des formules (4) et (5). De

[1] Voir, par exemple, DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Chapitre 3, p. 30.

même, pour que le point de coordonnées (u_1, v_1) soit réel, il faut et il suffit que u_1 et $-\frac{1}{v_1}$ soient conjuguées. On aura donc à la fois, en supposant que le point réel (u, v) vienne coïncider avec un point réel (u_1, v_1),

$$uv_0 = -1,$$

$$u_1 (v_1)_0 = -1,$$

v_0 et $(v_1)_0$ désignant les imaginaires conjuguées de v et de v_1. Remplaçons dans la seconde relation u_1 et $(v_1)_0$ par leurs valeurs; il vient

$$\frac{(n - qu)(n_0 - q_0 v_0)}{(pu - m)(p_0 v_0 - m_0)} + 1 = 0.$$

Cette relation s'écrit, en remplaçant v_0 par $-\frac{1}{u}$

$$\frac{(n - qu)(n_0 u + q_0)}{(pu - m)(m_0 u + p_0)} - 1 = 0.$$

ou

$$(7) \quad (pm_0 + qn_0)u^2 + (qq_0 + pp_0 - mm_0 - nn_0)u - (p_0 m + q_0 n) = 0.$$

Pour que la rotation considérée soit réelle, il faut évidemment que cette équation (7) se réduise à une identité; on aura alors

$$\frac{p_0}{n} = \frac{-q_0}{m} = \frac{-m_0}{q} = \frac{n_0}{p},$$

et les formules (6) pourront s'écrire

$$(8) \qquad u = \frac{mu_1 + n}{m_0 - n_0 u_1}, \qquad v = \frac{mv_1 + n}{m_0 - n_0 v_1}.$$

m_0 et n_0 étant conjuguées de m et de n. Cette forme particulière de substitution, qui convient aux rotations reelles, ne dépend que de trois paramètres réels arbitraires, comme le déplacement réel le plus général autour de l'origine, tandis que la substitution (6) et le déplacement imaginaire le plus général autour de l'origine dépendent de six paramètres réels arbitraires.

Supposons maintenant que l'équation (7) ne se réduise pas à une

identité. Cette équation possèdera deux racines *distinctes* u', u'' et il est aisé de vérifier que ces racines satisfont à la relation

$$u'u_0'' = -1.$$

Les valeurs correspondantes de v seront

$$v' = -\frac{1}{u_0'} = u'',$$

$$v'' = -\frac{1}{u_0''} = u';$$

les deux points réels de coordonnées (u', u''), (u'', u') sont diamétralement opposés, comme on s'en assure aussitôt à l'inspection des formules (5). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Dans tout déplacement imaginaire autour de l'origine, il existe un diamètre réel et un seul qui vient coïncider avec un autre diamètre réel.

Soit AA' le diamètre réel qui vient coïncider avec un autre diamètre réel BB'. Faisons suivre ce déplacement d'une rotation réelle R amenant BB' sur AA'; nous aurons un nouveau déplacement qui ne changera pas le diamètre AA', c'est-à-dire une rotation imaginaire autour de cet axe. Si à ce nouveau déplacement nous ajoutons la rotation R^{-1}, inverse de la rotation R, nous retrouvons évidemment le déplacement primitif. Il suit de là que *toute rotation imaginaire est équivalente à une suite de deux rotations:* 1° *une rotation imaginaire autour d'un axe réel;* 2° *une rotation réelle.*

On pourrait aussi décomposer la rotation imaginaire d'une autre façon, en mettant la première la rotation réelle composante. Enfin, on démontre de la même manière le théorème suivant que je me borne à énoncer: *Toute rotation imaginaire est équivalente à une suite de trois rotations:* 1° *une rotation réelle;* 2° *une rotation imaginaire autour d'un axe réel choisi arbitrairement;* 3° *une nouvelle rotation réelle.*

3. Nous emploierons dans ce qui suit la forme particulière donnée aux formules de MONGE par M. WEIERSTRASS; je vais rappeler en quelques mots comment on parvient à cette forme, en partant des idées de M. S. LIE. Puisque les tangentes à une courbe minima rencontrent le cercle imaginaire de l'infini, le plan tangent à la surface développable

formée par ces tangentes sera lui-même tangent au cercle de l'infini. Prenons l'équation de ce plan sous la forme

$$(9)\qquad (1-u^2)X + i(1+u^2)Y + 2uZ + 4f(u) = 0,$$

u désignant le paramètre variable et $f(u)$ une fonction quelconque de ce paramètre. On aura pour les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement les expressions suivantes

$$(10)\qquad \begin{cases} X = (1-u^2)f''(u) + 2uf'(u) - 2f(u), \\ Y = i(1+u^2)f''(u) - 2iuf'(u) + 2if(u), \\ Z = 2uf''(u) - 2f'(u), \end{cases}$$

qui peuvent encore s'écrire, en posant $f'''(u) = \mathfrak{F}(u)$,

$$(10')\qquad \begin{cases} X = \int (1-u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ Y = \int i(1+u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ Z = \int 2u\mathfrak{F}(u)du; \end{cases}$$

on obtiendra donc les nappes réelles de la surface minima réelle la plus générale en posant [1]

$$(11)\qquad \begin{cases} x = \Re\int (1-u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ y = \Re\int i(1+u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ z = \Re\int 2u\mathfrak{F}(u)du, \end{cases}$$

$\mathfrak{F}(u)$ désignant une fonction analytique quelconque de u. Rappelons encore que la variable u est, dans le système employé par Riemann, l'affixe du point de la sphère qui est l'image sphérique du point de la surface minima répondant à cette valeur de u.

Imaginons que l'on imprime un déplacement autour de l'origine à la courbe minima représentée par les équations (10) et (10'). Que deviennent les fonctions $f(u)$, $\mathfrak{F}(u)$? La réponse à cette question se trouve dans l'ouvrage déjà cité de M. Darboux (p. 304). J'ai donné aussi une

[1] Weierstrass, Monatsberichte der Berliner Akademie, p. 612, 855; 1866.

méthode un peu différente de celle de M. Darboux pour traiter la même question, dans un Mémoire *Sur les surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un des polyèdres réguliers.*[1] Il est vrai que je supposais les rotations réelles, mais la méthode reste la même pour les rotations imaginaires. Voici le résultat auquel on est conduit; soit

$$u = \frac{mv + n}{pv + q}$$

la substitution linéaire qui correspond à ce déplacement, et soient $g(v)$ et $\mathfrak{G}(v)$ les fonctions qui remplacent $f(u)$ et $\mathfrak{F}(u)$. On a

$$g(v) = f\left(\frac{mv+n}{pv+q}\right)\frac{(pv+q)^2}{\delta},$$

$$\mathfrak{G}(v) = \mathfrak{F}\left(\frac{mv+n}{pv+q}\right)\frac{\delta^2}{(pv+q)^4},$$

où

$$\delta = mq - np.$$

Supposons d'abord que l'on applique à la courbe Γ un déplacement réel; la surface minima réelle correspondante subira le même déplacement. J'ai admis cette proposition comme évidente dans le Mémoire que je viens de citer; mais il est bien facile de la démontrer en toute rigueur. Soit Γ la courbe minima représentée par les équations (1) et soit Γ_1 la courbe minima qui s'en déduit par une rotation réelle autour de l'origine. Cette courbe Γ_1 sera représentée par des équations de la forme

$$X_1 = aX + bY + cZ,$$

$$Y_1 = a'X + b'Y + c'Z,$$

$$Z_1 = a''X + b''Y + c''Z,$$

a, b, c, a', etc. étant les coefficients d'une substitution orthogonale, qui par hypothèse sont tous *réels*. La surface minima réelle S_1 que l'on déduit de Γ_1 sera donnée par les équations

$$x_1 = \Re X_1 = a\Re X + b\Re Y + c\Re Z,$$

$$y_1 = \Re Y_1 = a'\Re X + b'\Re Y + c'\Re Z,$$

$$z_1 = \Re Z_1 = a''\Re X + b''\Re Y + c''\Re Z.$$

[1] Annales de l'Ecole Normale supérieure, 3ème série, t. 4, p. 251; 1887.

ou encore

$$x_1 = ax + by + cz,$$
$$y_1 = a'x + b'y + c'z,$$
$$z_1 = a''x + b''y + c''z;$$

ces formules mettent en évidence le résultat annoncé. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Si on remplace dans les formules (11) $\mathfrak{F}(u)$ *par*

$$\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{m_0 - n_0 u}\right)\frac{(mm_0+nn_0)^2}{(m_0 - n_0 u)^4},$$

m_0 *et* n_0 *désignant les imaginaires conjuguées de* m *et de* n, *les nouvelles formules représentent la même surface minima rapportée à des axes différents.*

4. Il ne nous reste plus qu'à étudier l'effet d'un déplacement imaginaire appliqué à la courbe minima. D'après les propositions combinées des paragraphes 2 et 3, nous pouvons même nous borner à considérer l'effet d'une rotation autour d'un diamètre réel de la sphère. Supposons que nous ayons pris ce diamètre pour axe des z; alors la substitution correspondante à cette rotation sera de la forme

$$u = ke^{\theta i}u_1,$$

k et θ étant réels (on peut même supposer $k > 0$). Cette rotation peut encore être décomposée en deux: 1° une rotation réelle d'un angle θ autour de Oz; 2° une rotation imaginaire caractérisée par la substitution

$$u = ku_1,$$

ces deux rotations pouvant d'ailleurs être effectuées dans l'ordre qu'on voudra. Comme la rotation réelle ne fait que déplacer la surface minima, nous n'avons en définitive qu'à examiner la rotation imaginaire définie par la substitution

$$u = ku_1,$$

où k est réel et différent de ± 1.

Soient α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les coordonnées rectilignes de deux posi-

tions correspondantes du même point avant et après le déplacement. On a d'une manière générale

$$\alpha_1 = a\alpha + a'\beta + a''\gamma,$$

$$\beta_1 = b\alpha + b'\beta + b''\gamma,$$

$$\gamma_1 = c\alpha + c'\beta + c''\gamma,$$

$a, b, c, a', \ldots$ étant les coefficients d'une substitution orthogonale dont on trouvera les valeurs en fonction de m, n, p, q à la page 34 de l'ouvrage de M. Darboux. Dans le cas actuel, ces valeurs s'obtiennent bien aisément. On a en effet, d'après les formules (5),

$$\alpha_1 = \frac{1 - u_1 v_1}{u_1 - v_1}, \qquad \beta_1 = \frac{i(1 + u_1 v_1)}{u_1 - v_1}, \qquad \gamma_1 = \frac{u_1 + v_1}{u_1 - v_1}.$$

ou, en remplaçant u_1 par $\frac{u}{k}$ et v_1 par $\frac{v}{k}$,

$$\alpha_1 = \frac{k^2 - uv}{k(u - v)}, \qquad \beta_1 = \frac{i(k^2 + uv)}{k(u - v)}, \qquad \gamma_1 = \frac{u + v}{u - v};$$

éliminons u et v entre ces équations et les équations (5), il vient:

$$\alpha_1 = \frac{1 + k^2}{2k}\alpha - i\frac{k^2 - 1}{2k}\beta,$$

$$\beta_1 = \frac{1 + k^2}{2k}\beta + i\frac{k^2 - 1}{2k}\alpha,$$

$$\gamma_1 = \gamma.$$

Les coefficients $a, b, c, a', \ldots$ auront par conséquent les valeurs suivantes:

$$a = \frac{1 + k^2}{2k}, \qquad a' = -i\frac{k^2 - 1}{2k}, \qquad a'' = 0.$$

$$b = i\frac{k^2 - 1}{2k}, \qquad b' = \frac{1 + k^2}{2k}, \qquad b'' = 0,$$

$$c = 0, \qquad c' = 0, \qquad c'' = 1.$$

Appliquons la rotation précédente à la courbe minima Γ représentée par

les équations (1); nous obtenons une nouvelle courbe minima Γ_1 représentée par les équations:

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{1+k^2}{2k}A(t) - i\frac{k^2-1}{2k}B(t), \\ Y_1 &= i\frac{k^2-1}{2k}A(t) + \frac{1+k^2}{2k}B(t), \\ Z_1 &= C(t). \end{aligned}\right.$$

Soient S et S_1 les surfaces minima réelles qui correspondent respectivement aux courbes Γ et Γ_1, S_0 la surface *adjointe* à S; désignons par x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_0, y_0, z_0 les coordonnées de trois points correspondants de ces trois surfaces, c'est-à-dire de trois points qui correspondent à une même valeur de t. Les coordonnées d'un point réel de la surface adjointe S_0 sont données, comme on sait, par les formules

$$(12) \qquad x_0 = \Re iA(t), \qquad y_0 = \Re iB(t), \qquad z_0 = \Re iC(t);$$

on aura pour expressions des coordonnées d'un point de S_1

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+k^2}{2k}\Re A(t) - \frac{k^2-1}{2k}\Re iB(t), \\ y_1 &= \frac{1+k^2}{2k}\Re B(t) + \frac{k^2-1}{2k}\Re iA(t), \\ z_1 &= \Re C(t). \end{aligned}\right.$$

Entre ces dernières formules et les formules (2) et (12) éliminons

$$\Re A(t), \Re B(t), \Re C(t), \Re iA(t), \Re iB(t), \Re iC(t);$$

on arrive aux expressions suivantes pour les coordonnées d'un point de la surface S_1:

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+k^2}{2k}x - \frac{k^2-1}{2k}y_0, \\ y_1 &= \frac{1+k^2}{2k}y + \frac{k^2-1}{2k}x_0, \\ z_1 &= z. \end{aligned}\right.$$

Si k est positif, ce qu'on peut toujours supposer, on posera $k = e^\varphi$, et les formules pourront s'écrire

$$(14)\qquad \begin{cases} x_1 = x \cosh\varphi - y_0 \sinh\varphi, \\ y_1 = y \cosh\varphi + x_0 \sinh\varphi, \\ z_1 = z. \end{cases}$$

Il me paraît intéressant de faire remarquer l'analogie curieuse que présentent ces formules avec les formules qui définissent une rotation, dans le sens ordinaire du mot, autour de l'axe des z. Cette analogie est d'ailleurs purement formelle.

On arrive rapidement au même résultat au moyen des formules de M. WEIERSTRASS. Si la courbe minima Γ a pour fonction caractéristique $\mathfrak{F}(u)$, la courbe Γ_1 aura pour fonction caractéristique $k^2\mathfrak{F}(ku)$ et les trois surfaces S, S_0, S_1 seront données respectivement par les groupes de formules ci-dessous:

$$S \begin{cases} x = \Re\int(1 - u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ y = \Re\int i(1 + u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ z = \Re\int 2u\mathfrak{F}(u)du; \end{cases}$$

$$S_0 \begin{cases} x_0 = \Re\int i(1 - u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ y_0 = \Re\int -(1 + u^2)\mathfrak{F}(u)du, \\ z_0 = \Re\int 2iu\mathfrak{F}(u)du; \end{cases}$$

$$S_1 \begin{cases} x_1 = \Re\int(1 - v^2)k^2\mathfrak{F}(kv)dv, \\ y_1 = \Re\int i(1 + v^2)k^2\mathfrak{F}(kv)dv, \\ z_1 = \Re\int 2vk^2\mathfrak{F}(kv)dv. \end{cases}$$

Des deux premiers groupes on tire

$$\Re\int \mathfrak{F}(u)du = \frac{x - y_0}{2}, \qquad \Re\int u^2\mathfrak{F}(u)du = -\frac{x + y_0}{2},$$

$$\Re\int i\mathfrak{F}(u)du = \frac{x_0 + y}{2}, \qquad \Re\int iu^2\mathfrak{F}(u)du = \frac{y - x_0}{2};$$

les expressions des coordonnées x_1, y_1, z_1 peuvent encore s'écrire, en posant $kv = u$,

$$x_1 = k\Re\int \mathfrak{F}(u)du - \frac{1}{k}\Re\int u^2\mathfrak{F}(u)du,$$

$$y_1 = k\Re\int i\mathfrak{F}(u)du + \frac{1}{k}\Re\int iu^2\mathfrak{F}(u)du,$$

$$z_1 = \Re\int 2u\mathfrak{F}(u)du,$$

et, en éliminant les intégrales, on retrouve précisément les formules (13).

Pour abréger le langage, je dirai que la surface S_1 est une surface *dérivée* de S; j'appellerai l'axe réel autour duquel s'effectue la rotation de la courbe minima *l'axe de dérivation* et la constante réelle k *paramètre de dérivation*. Si on se donne la surface S, l'axe et le paramètre de dérivation, la surface dérivée S_1 n'est pas entièrement déterminée; on sait en effet que la surface adjointe d'une surface minima donnée n'est pas complètement définie de position. Cette surface peut subir une translation quelconque ou être remplacée par sa symétrique relativement à l'origine des coordonnées. Lorsque la surface S_0 subit une translation, les formules (14) nous montrent qu'il en est de même de la surface S_1. Si x_0, y_0, z_0 changent de signe, cela revient à changer le signe de φ dans ces formules. On voit de même que, si l'axe de dérivation se déplace parallèlement à lui-même, la surface S_1 subit aussi une translation. Par conséquent, si on fait abstraction d'une translation quelconque, les surfaces dérivées d'une surface minima donnée dépendent de trois constantes réelles seulement, le paramètre de dérivation et les deux constantes réelles qui déterminent la direction de l'axe de dérivation.

5. Considérons le groupe des transformations homographiques qui conservent le cercle de l'infini; les coefficients d'une transformation de ce groupe dépendent de *quatorze* paramètres réels arbitraires. Ces transformations appliquées à une même courbe minima donneront naissance à une infinité de surfaces minima réelles; nous dirons que ces surfaces appartiennent à une même *famille*. Il est aisé de compter les paramètres dont dépendent les surfaces d'une même famille. Nous avons d'abord les six constantes réelles provenant du déplacement réel le plus général; nous avons ensuite les trois paramètres réels dont dépendent les surfaces

dérivées. Enfin, quand on passe d'une surface minima à une surface homothétique d'une surface associée à la première, on introduit encore deux paramètres réels. Cela nous fait en tout *onze* paramètres réels, au lieu de quatorze dont dépend la transformation homographique la plus générale qui conserve le cercle de l'infini. On se rend compte de cette différence en remarquant qu'il existe une infinité de transformations homographiques, dépendant de trois constantes réelles, que l'on peut appliquer à une courbe minima Γ, sans changer la surface minima correspondante: ce sont les translations dont les composantes suivant les axes sont complètement imaginaires.

La fonction caractéristique de M. Weierstrass $\mathfrak{F}(u)$ restant la même pour une surface minima quand on lui fait subir une translation quelconque, il est naturel de faire abstraction d'un déplacement de ce genre; c'est ce que nous ferons désormais. Alors les surfaces minima d'une même famille ne dépendront plus que de *huit* paramètres réels. Les fonctions caractéristiques seront comprises dans la forme générale

$$\frac{A}{(pu+q)^4}\,\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right),$$

A, m, n, p, q étant des constantes quelconques. Parmi ce groupe de surfaces il y a lieu de distinguer des sous-groupes très-importants formés par les surfaces dérivées de l'une d'elles, déplacées en outre d'une façon arbitraire. Par exemple, si une surface a pour fonction caractéristique $\mathfrak{F}(u)$, les fonctions caractéristiques du sous-groupe auquel elle appartient seront de la forme

$$\frac{(mq-np)^2}{(pu+q)^4}\,\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right).$$

Il peut arriver que les surfaces d'une même famille ne dépendent pas de huit paramètres distincts; c'est une question qui sera examinée en détail plus loin.

Appelons *déformation* l'opération par laquelle on passe d'une surface minima à une surface minima associée, et *dilatation* l'opération par laquelle on passe d'une surface à une surface homothétique. Pour passer d'une surface minima à une surface homothétique ou à une surface associée on multiplie la fonction caractéristique par un facteur réel a ou par un facteur

de la forme $e^{\theta i}$, θ étant réel; j'appellerai a le *paramètre de dilatation* et θ le *paramètre de déformation.* Il est clair que la dilatation, la déformation et la dérivation sont trois opérations commutatives. En particulier, toute surface associée à une surface dérivée de S est identique à la surface dérivée de la surface associée à S, les paramètres de dérivation et de déformation restant les mêmes dans les deux cas.

6. Je me propose d'étudier dans ce paragraphe les principales propriétés de la surface dérivée S_1 représentée par les équations (14),

$$(14)\qquad \begin{cases} x_1 = x\cosh\varphi - y_0\sinh\varphi, \\ y_1 = y\cosh\varphi + x_0\sinh\varphi, \\ z_1 = z; \end{cases}$$

on en tire

$$dx_1 = dx\cosh\varphi - dy_0\sinh\varphi,$$
$$dy_1 = dy\cosh\varphi + dx_0\sinh\varphi,$$
$$dz_1 = dz.$$

Or on a[1]

$$dx_0 = \beta dz - \gamma dy, \qquad dy_0 = \gamma dx - \alpha dz, \qquad dz_0 = \alpha dy - \beta dx,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs d'une direction convenable sur la normale à la surface S. Remplaçons dans les formules précédentes dx_0 et dy_0 par leurs valeurs; il vient

$$(15)\qquad \begin{cases} dx_1 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]dx + \alpha\sinh\varphi dz, \\ dy_1 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]dy + \beta\sinh\varphi dz, \\ dz_1 = dz. \end{cases}$$

Si on suppose $dz = 0$, dx_1 et dy_1 sont proportionnels à dx et à dy. Par conséquent, *les sections des deux surfaces S et S_1 par un même plan perpendiculaire à l'axe de dérivation se correspondent point par point de façon*

[1] Schwarz. *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* (Journal für Mathematik, t. **80**, p. 280; 1875).

que les tangentes aux deux sections aux points correspondants soient parallèles.

Soient ds et ds_1 les éléments linéaires des deux surfaces, dA et dA_1 les éléments superficiels. On a

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]^2(dx^2 + dy^2)$$
$$+ [1 + (\alpha^2 + \beta^2)\sinh^2\varphi]dz^2 + 2\sinh\varphi[\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi](\alpha dx + \beta dy)dz;$$

en remplaçant $\alpha^2 + \beta^2$ par $1 - \gamma^2$, $\alpha dx + \beta dy$ par $-\gamma dz$ et en réduisant, on trouve

$$ds_1^2 = [\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi]^2 ds^2;$$

comme γ est inférieur à l'unité, $\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi$ est toujours positif et on a en valeur absolue

$$ds_1 = (\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi)ds. \tag{16}$$

Ainsi, *les deux surfaces S et S_1 sont appliquées conformément l'une sur l'autre par le mode de correspondance qui vient d'être établi.* En d'autres termes, deux courbes quelconques tracées sur S se coupent sous le même angle que leurs *images* sur la surface S_1. On déduit de la formule (16) la relation suivante entre les éléments superficiels

$$dA_1 = (\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi)^2 dA. \tag{17}$$

Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus directeurs de la normale à la surface S_1; en exprimant que l'on a identiquement

$$\alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 + \gamma_1 dz_1 = 0,$$

on trouve aisément

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\gamma\cosh\varphi - \sinh\varphi} = \frac{\pm 1}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi},$$

et par suite

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \pm\frac{\alpha}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi}, \\ \beta_1 &= \pm\frac{\beta}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi}, \\ \gamma_1 &= \pm\frac{\gamma\cosh\varphi - \sinh\varphi}{\cosh\varphi - \gamma\sinh\varphi}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Inversement on aura

$$
(S') \quad \left|\begin{aligned}
\alpha &= \pm \frac{\alpha_1}{\cosh\varphi + \gamma_1 \sinh\varphi}, \\
\beta &= \pm \frac{\beta_1}{\cosh\varphi + \gamma_1 \sinh\varphi}, \\
\gamma &= \pm \frac{\gamma_1 \cosh\varphi + \sinh\varphi}{\cosh\varphi + \gamma_1 \sinh\varphi}.
\end{aligned}\right.
$$

Si α, β, γ vérifient une relation linéaire telle que

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p = 0,$$

l, m, n, p étant des constantes, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ vérifient une relation de même forme et inversement. Par conséquent, *toute courbe de la surface S dont l'image sphérique est un cercle a pour transformée sur la surface S_1 une courbe jouissant de la même propriété, et réciproquement.*

En particulier, si γ est constant, il en sera de même de γ_1. Donc les méridiens et les parallèles de la surface S ont respectivement pour images les méridiens et les parallèles de la surface S_1. Nous appelons avec Minding méridiens d'une surface les courbes pour lesquelles la normale à la surface est parallèle à un plan vertical fixe, et parallèles les courbes pour lesquelles la normale fait un angle constant avec le plan horizontal.

Des valeurs trouvées plus haut pour $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ on déduit la relation

$$d\alpha_1 dx_1 + d\beta_1 dy_1 + d\gamma_1 dz_1 = \pm (d\alpha dx + d\beta dy + d\gamma dz)$$

dont l'interprétation est immédiate. Supposons en effet que le point x, y, z décrive une ligne asymptotique de S; on aura

$$d\alpha dx + d\beta dy + d\gamma dz = 0$$

et par suite

$$d\alpha_1 dx_1 + d\beta_1 dy_1 + d\gamma_1 dz_1 = 0,$$

de sorte que le point x_1, y_1, z_1 décrira aussi une ligne asymptotique de S_1. Comme les lignes de courbure des deux surfaces coupent les lignes asymptotiques sous un angle de 45° et que les angles se conservent dans la transformation, on peut énoncer le théorème suivant:

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S ont respectivement pour transformées les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S_1.

Si la surface S admet une ligne de courbure plane, la transformée de cette courbe sur la surface S_1 sera encore ligne de courbure de S_1, et son image sphérique sera encore un cercle. Elle sera donc aussi une ligne de courbure plane. De même si la surface S admet une ligne asymptotique hélicoïdale, l'image sphérique de cette courbe sera un petit cercle, et sa transformée sera une ligne asymptotique hélicoïdale de S_1. Donc:

Toute ligne de courbure plane de la surface S se change en une ligne de courbure plane de S_1, et toute ligne asymptotique hélicoïdale se change en une ligne asymptotique hélicoïdale.

Supposons que la surface S soit algébrique; il en sera de même de la surface S_1. D'ailleurs il est clair qu'une transformation homographique, qui conserve le cercle de l'infini, appliquée à une courbe minima, ne change pas l'ordre de la développable formée par les tangentes à cette courbe ni la multiplicité du cercle de l'infini sur cette développable. On a donc le théorème suivant, qui est vrai pour toutes les surfaces d'une même famille et qui a été énoncé par M. Lie.[1]

Étant données deux surfaces minima d'une même famille, si aucune n'est surface double ou si toutes les deux sont surfaces doubles, elles sont de même classe. Si une seule est surface double, sa classe est la moitié de celle de l'autre.

Il n'existe pas de loi aussi simple en ce qui concerne l'ordre de deux surfaces. Considérons par exemple une courbe minima Γ d'ordre m ayant un ou plusieurs points communs à l'infini avec sa conjuguée Γ_0; l'ordre de la surface minima correspondante sera inférieur à m^2. Il est clair qu'en appliquant à la courbe Γ un déplacement imaginaire quelconque la nouvelle courbe Γ_1 n'aura plus, en général, de point commun à l'infini avec sa conjuguée, et l'ordre de la nouvelle surface minima sera bien égal à m^2.

7. La plupart des propriétés qui viennent d'être démontrées s'établissent aussi très aisément au moyen des formules de M. Weierstrass. Afin

[1] Mathematische Annalen, t. **15**, p. 476.

de n'avoir à considérer que des substitutions linéaires homogènes, nous adopterons un nouveau système de formules, dues également à l'illustre géomètre et qui ont été employées aussi par M. Darboux.[1] Dans les formules (11) faisons un changement de variable et introduisons les notations nouvelles

$$u = -\frac{G(t)}{H(t)}, \qquad \mathfrak{F}(u)\,du = -iH^2(t)\,dt;$$

les équations de la surface minima S prendront la forme suivante:

$$(19)\qquad \begin{cases} x = \Re\int i[G^2(t) - H^2(t)]\,dt, \\ y = \Re\int [G^2(t) + H^2(t)]\,dt, \\ z = \Re\int 2iG(t)H(t)\,dt. \end{cases}$$

L'élément linéaire sera donné par la formule

$$(20)\qquad ds^2 = 4[G(t)G_0(t_0) + H(t)H_0(t_0)]^2\,dt\,dt_0,$$

$G_0(t_0)$ et $H_0(t_0)$ étant les imaginaires conjuguées de $G(t)$ et de $H(t)$; l'équation différentielle des lignes asymptotiques deviendra

$$(21)\qquad \Re i(HG' - GH')\,dt^2 = 0$$

et celle des lignes de courbure sera de même

$$(22)\qquad \Re(HG' - GH')\,dt^2 = 0.$$

Considérons maintenant une autre surface minima S_1 donnée par les équations

$$(23)\qquad \begin{cases} x_1 = \Re\int i[G_1^2(t) - H_1^2(t)]\,dt, \\ y_1 = \Re\int [G_1^2(t) + H_1^2(t)]\,dt, \\ z_1 = \Re\int 2iG_1(t)H_1(t)\,dt, \end{cases}$$

où on a

$$G_1(t) = aG(t) + bH(t),$$
$$H_1(t) = cG(t) + dH(t),$$

[1] *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, p. 453.

a, b, c, d désignant quatre constantes telles que $ad - bc$ ne soit pas nul. Toutes les surfaces minima ainsi obtenues appartiennent à une même famille; ces surfaces dépendent bien, comme on voit, de huit paramètres réels. Pour avoir le sous-groupe formé par les surfaces dérivées de la surface (19), déplacées d'une façon quelconque, il suffit de supposer

$$ad - bc = 1.$$

Enfin, si la seconde surface se déduit de la première par un simple déplacement, les formules de substitution auront la forme particulière suivante

$$G_1(t) = \frac{m}{\sqrt{\delta}} G(t) - \frac{n}{\sqrt{\delta}} H(t),$$

$$H_1(t) = \frac{n_0}{\sqrt{\delta}} G(t) + \frac{m_0}{\sqrt{\delta}} H(t),$$

m_0 et n_0 étant les imaginaires conjuguées de m et de n, et δ le discriminant $mm_0 + nn_0$.

Prenons le cas général où $ad - bc$ est égal à l'unité, et faisons correspondre les points des deux surfaces S et S_1 qui répondent à une même valeur de t. On aura

$$H_1 G_1' - G_1 H_1' = HG' - GH';$$

d'où on déduit que les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure sont les mêmes pour les deux surfaces. En comparant de même la formule (20) à la formule analogue pour la seconde surface on voit que le rapport $\frac{ds}{ds_1}$ ne dépend que de t.

Les formules qui précèdent permettent de démontrer très simplement la proposition que voici: si l'on considère sur une surface minima un point non singulier, le point correspondant sur toute autre surface de la même famille sera également un point non singulier; si le premier point est un *point de ramification* d'ordre $n - 2$, il en est de même du second.

Supposons qu'on ait pris l'axe des z parallèle à la normale à la surface S au point considéré, de façon que la valeur de u soit nulle pour ce point. On pourra toujours choisir la variable t de façon qu'elle

soit nulle aussi pour $u = 0$ et que dans le voisinage de l'origine les fonctions $H(t)$, $G(t)$ aient respectivement les formes suivantes [1]

$$H(t) = P(t),$$
$$G(t) = t^{n-1} P_1(t),$$

$P(t)$ et $P_1(t)$ représentant des séries ordonnées suivant les puissances positives de t et ne s'annulant pas pour $t = 0$, et n un nombre entier positif au moins égal à 2. Cela posé, considérons une surface de la même famille représentée par les équations (23) où on a pris

$$G_1(t) = aG(t) + bH(t),$$
$$H_1(t) = cG(t) + dH(t);$$

faisons subir à cette nouvelle surface un déplacement, ce qui revient à remplacer dans les formules (23) G_1 et H_1 par les nouvelles fonctions G_2 et H_2,

$$G_2(t) = \frac{m}{\sqrt{\delta}} G_1(t) - \frac{n}{\sqrt{\delta}} H_1(t) = \frac{ma - nc}{\sqrt{\delta}} G(t) + \frac{mb - nd}{\sqrt{\delta}} H(t),$$

$$H_2(t) = \frac{n_0}{\sqrt{\delta}} G_1(t) + \frac{m_0}{\sqrt{\delta}} H_1(t) = \frac{n_0 a + m_0 c}{\sqrt{\delta}} G(t) + \frac{n_0 b + m_0 d}{\sqrt{\delta}} H(t).$$

En prenant m et n de façon que $mb - nd = 0$, les fonctions $G_2(t)$ et $H_2(t)$ auront dans le voisinage de l'origine la même forme que les fonctions $G(t)$ et $H(t)$; d'où résulte la proposition annoncée.

8. Revenons à la surface S_1 représentée par les équations (14); si dans ces équations on fait varier le paramètre φ, le point (x_1, y_1) décrit une branche de l'hyperbole ayant pour équation

$$(x_1 x_0 + y_1 y_0)^2 - (x_1 y - y_1 x)^2 = (x x_0 + y y_0)^2,$$

qui se réduit à une droite si l'on a $x x_0 + y y_0 = 0$. Par suite, lorsqu'on fait varier φ de $-\infty$ à $+\infty$, tous les points de la surface variable S_1 décrivent des hyperboles ayant leurs centres sur l'axe des z. Mais il

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, p. 461.

est à remarquer qu'il n'y a qu'une branche de l'hyperbole qui soit décrite; pour avoir la seconde branche il faudrait donner au paramètre k qui figure dans les formules (13) des valeurs négatives.

On est ainsi conduit à se poser la question suivante. Etant données dans un même plan perpendiculaire à l'axe des z deux courbes quelconques C, C_1, peut-on choisir la surface minima S passant par C de façon que l'une de ses dérivées passe par la courbe C_1? Les propriétés obtenues plus haut permettent de répondre par l'affirmative. En effet, faisons correspondre les points des deux courbes C, C_1 où les tangentes sont parallèles, et donnons-nous le paramètre φ. Soient $x, y; x_1, y_1$ les coordonnées de deux points correspondants sur les courbes C, C_1, $d\sigma$, $d\sigma_1$ les éléments d'arcs correspondants, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{dy_1}{dy} = \frac{d\sigma_1}{d\sigma}.$$

Des formules (14) nous tirons

$$x_0 = \frac{y_1 - y\cosh\varphi}{\sinh\varphi}, \qquad dx_0 = dy\,\frac{\frac{d\sigma_1}{d\sigma} - \cosh\varphi}{\sinh\varphi},$$

$$y_0 = \frac{x\cosh\varphi - x_1}{\sinh\varphi}, \qquad dy_0 = -\,dx\,\frac{\frac{d\sigma_1}{d\sigma} - \cosh\varphi}{\sinh\varphi};$$

posons encore

$$dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 = dx^2 + dy^2.$$

On en tire

$$dz_0 = d\sigma\sqrt{1 - \gamma^2}, \qquad z_0 = \int\sqrt{1 - \gamma^2}\,d\sigma,$$

où

$$\gamma = \frac{\frac{d\sigma_1}{d\sigma} - \cosh\varphi}{\sinh\varphi}.$$

Choisissons le paramètre φ de façon que γ soit inférieur à l'unité; nous déterminons une courbe gauche C_0 décrite par le point de coordonnées x_0, y_0, z_0, telle que les arcs correspondants des deux courbes C, C_0 sont égaux et les éléments correspondants orthogonaux, d'après la rela-

tion $dxdx_0 + dydy_0 = 0$. Il existe donc une surface minima passant par la courbe C et telle que la courbe correspondante sur la surface adjointe soit précisément C_0. Dans les formules qui donnent cette surface il n'entre qu'une seule quadrature provenant de l'équation qui donne z_0. Si on applique à cette surface S les formules (14), on reconnaît par un calcul inverse du précédent que la surface dérivée S_1 passe par la courbe C_1.

Considérons en particulier une surface S admettant la courbe plane C pour ligne de courbure; γ étant constant le long de cette courbe, le rapport $\frac{ds_1}{ds}$ sera constant d'après la formule (16) et par suite les sections des surfaces dérivées par le plan de la courbe C seront des courbes homothétiques à la première. D'autre part, les formules (18) nous montrent que γ_1 sera constant aussi le long de la courbe C_1. On a donc le théorème suivant:

Si une surface minima S admet une ligne de courbure plane C, les surfaces dérivées de S avec un axe de dérivation perpendiculaire au plan de cette courbe sont coupées par ce plan suivant des lignes de courbure homothétiques à la courbe C.

Ainsi on peut faire dériver les surfaces qui admettent une ligne de courbure plane des surfaces qui admettent pour ligne géodésique une ligne homothétique à celle-là.[1] Pour donner une application de cette propriété, considérons l'alysséide et un axe de dérivation perpendiculaire à un plan méridien; les surfaces dérivées admettront une chaînette pour ligne de courbure plane. Or, comme la dérivation change les lignes de courbure planes en lignes de courbure planes, les nouvelles surfaces auront encore toutes leurs lignes de courbure planes. Ce sont les surfaces trouvées par M. O. Bonnet.[2] Nous voyons que cette seule propriété d'une surface minima d'admettre pour ligne de courbure une chaînette permet d'affirmer que toutes les autres lignes de courbure de la surface sont également des courbes planes.

Si une surface minima admet une ligne de courbure plane C, les surfaces associées coupent un cylindre ayant pour section droite une courbe semblable à C suivant une ligne géodésique et sous un angle

[1] Voir S. Lie, Mathematische Annalen, t. **15**, p. 477.

[2] Comptes rendus, t. **41**, p. 1057; 1855.

constant. Le théorème qui précède rapproché de la remarque faite à la fin du paragraphe 5 nous donne ce nouveau théorème:

Si une surface minima coupe un cylindre suivant une ligne géodésique et sous un angle constant, les surfaces dérivées avec un axe de dérivation parallèle aux génératrices du cylindre coupent un cylindre homothétique au premier suivant une ligne géodésique et sous un angle constant.[1]

En particulier, on peut faire dériver les surfaces qui admettent une ligne asymptotique hélicoïdale des surfaces qui passent par une ligne droite.

9. Lorsqu'une surface minima passe par une droite réelle, on sait que cette droite est un axe de symétrie pour la surface, et de même lorsqu'une surface minima admet une ligne géodésique plane, le plan de cette ligne est un plan de symétrie pour la surface. Ces théorèmes peuvent être généralisés au moyen des surfaces dérivées.

Considérons une surface minima S ayant une ligne de courbure plane C dans le plan des xy; soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations de cette courbe, σ l'arc compté à partir d'un point fixe et ω l'angle constant sous lequel la surface coupe le plan des xy. La courbe correspondante à C sur la surface adjointe S_0 sera une hélice tracée sur un cylindre ayant pour section droite une courbe homothétique à C que l'on aurait fait tourner de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine; soient

$$x_0 = -y\cos\omega, \qquad y_0 = x\cos\omega, \qquad z_0 = \sigma\sin\omega$$

les équations de cette courbe. Posons

$$e^{\varphi} = \frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega};$$

on en tire

$$\cosh\varphi = \frac{1+\cos^2\omega}{1-\cos^2\omega}, \qquad \sinh\varphi = \frac{2\cos\omega}{1-\cos^2\omega}.$$

Le paramètre φ étant choisi de cette façon, considérons la surface S_1

[1] Voir S. LIE, Mathematische Annalen, t. **15**, p. 477.

représentée par les équations (14); pour tout point de la courbe C on aura, d'après les valeurs de x_0, y_0,

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = 0,$$

c'est-à-dire que la surface dérivée S_1 passera également par la courbe C. D'autre part, les formules (18) nous donnent, pour les cosinus directeurs de la normale à la nouvelle surface le long de la courbe C,

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \beta_1 = \beta, \qquad \gamma_1 = -\cos\omega;$$

nous voyons que les plans tangents aux deux surfaces S et S_1 en un même point de la courbe C sont symétriques par rapport au plan des xy. Imaginons maintenant que l'on prenne la surface symétrique de S_1 par rapport au plan des xy, la nouvelle surface ainsi obtenue S_1' passera encore par la courbe C et aura le même plan tangent que la surface S tout le long de cette courbe. Donc, d'après une proposition bien connue de la théorie des surfaces minima, les surfaces S et S_1' coïncident. Ainsi:

Lorsqu'une surface minima S admet une ligne de courbure plane située dans un plan P, si on prend la dérivée de la portion de surface située d'un côté du plan P avec un axe de dérivation perpendiculaire à ce plan et un paramètre convenable, puis la surface symétrique de cette dérivée par rapport au plan P, on retrouve la portion de la surface primitive S située de l'autre côté de ce plan.

Cette proposition comprend évidemment comme cas particulier le théorème rappelé plus haut sur les surfaces à lignes géodésiques planes. On fait ainsi correspondre les sections des deux nappes de la surface S équidistantes du plan P et les points de ces deux sections où les tangentes sont parallèles. Il est aisé de trouver comment sont disposés sur la sphère les images sphériques de deux points correspondants M, M' de la surface S. Soient α, β, γ; α', β', γ' les cosinus directeurs des deux normales aux points M et M'. Au moyen des formules (18), nous obtenons les relations:

$$\alpha' = \frac{\alpha \sin^2\omega}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega},$$

$$\beta' = \frac{\beta \sin^2\omega}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega},$$

$$\gamma' = \frac{2\cos\omega - \gamma(1 + \cos^2\omega)}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega};$$

ces relations expriment, il est aisé de le vérifier, que la droite qui joint les deux points $m(\alpha, \beta, \gamma)$ et $m'(\alpha', \beta', \gamma')$ de la sphère va couper l'axe Oz en un point Q de coordonnées $\left(x = y = 0, z = \frac{1}{\cos\omega}\right)$. Ce point Q est précisément le pôle du petit cercle de la sphère qui est l'image sphérique de la ligne de courbure plane C. On peut donc dire que les images sphériques des deux points M, M' sont symétriques par rapport au petit cercle qui est l'image sphérique de la ligne de courbure plane considérée. J'appelle points *symétriques* par rapport à un petit cercle deux points tels que la droite qui les joint va passer par le pôle du plan de ce cercle.

On a un théorème analogue au précédent pour les surfaces minima qui admettent une ligne asymptotique hélicoïdale. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de cette hélice, ω l'angle de la tangente à l'hélice avec le plan horizontal; la courbe correspondante sur la surface adjointe sera une courbe plane représentée par les formules

$$x_0 = -\frac{y}{\cos\omega}, \qquad y_0 = \frac{x}{\cos\omega}.$$

Cela posé, prenons pour le paramètre k qui figure dans les formules (13) la valeur négative

$$k = -e^{\text{[illegible]}} = -\frac{1 + \cos\omega}{1 - \cos\omega};$$

les formules (14) seront remplacées par les suivantes

$$\begin{aligned}
x_1 &= -x\frac{1 + \cos^2\omega}{\sin^2\omega} + y_0\frac{2\cos\omega}{\sin^2\omega}, \\
y_1 &= -y\frac{1 + \cos^2\omega}{\sin^2\omega} - x_0\frac{2\cos\omega}{\sin^2\omega}. \\
z_1 &= z.
\end{aligned}$$

et on aura de même pour les cosinus directeurs de la normale à la nouvelle surface

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{-\alpha\sin^2\omega}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega}. \\
\beta_1 &= \frac{-\beta\sin^2\omega}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega}. \\
\gamma_1 &= \frac{\gamma(1 + \cos^2\omega) - 2\cos\omega}{1 + \cos^2\omega - 2\gamma\cos\omega}.
\end{aligned}$$

Si on applique ces formules à un point de l'hélice on aura

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z,$$

$$\alpha_1 = -\alpha, \qquad \beta_1 = -\beta, \qquad \gamma_1 = -\cos\omega;$$

par conséquent la nouvelle surface passe encore par cette hélice et elle admet le même plan tangent que la première tout le long de cette courbe. Donc les deux surfaces se confondent. Ainsi, *lorsqu'une surface minima réelle admet une ligne asymptotique hélicoïdale, les deux nappes de la surface se déduisent l'une de l'autre par une dérivation convenable, l'axe de dérivation étant parallèle aux génératrices du cylindre.* Les points correspondants sont dans un même plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre et les tangentes à la section de la surface par ce plan aux points correspondants sont parallèles. Les images sphériques de ces deux points sont encore symétriques par rapport au petit cercle qui est l'image sphérique de la ligne hélicoïdale.

10. Nous allons appliquer les considérations qui précèdent à quelques surfaces minima. Prenons d'abord la surface du neuvième ordre d'Enneper, que l'on obtient en supposant que la fonction $\mathfrak{F}(u)$ se réduit à une constante réelle; toute surface de la même famille aura une fonction caractéristique de la forme

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{A}{(m + n_0 u)^4}.$$

Ces surfaces dépendent par conséquent de *quatre* constantes réelles seulement. Il est aisé de reconnaître que toutes ces surfaces sont semblables à la surface primitive. En effet, faisons subir à la surface minima ayant pour fonction caractéristique la fonction précédente le déplacement qui correspond à la substitution linéaire

$$u = \frac{mv + n}{m_0 - n_0 v};$$

la fonction caractéristique de la surface minima dans sa nouvelle position se réduira à une constante ae^{bi}, a et b étant réels. La surface est donc homothétique à une surface associée à la surface d'Enneper, et on sait

que cette dernière est superposable à ses associées. Du reste, on se rend compte de ce fait *a priori*, si on remarque que la surface d'ENNEPER est la seule surface minima algébrique à lignes de courbure planes et que, dans une dérivation, les lignes de courbure planes se changent en lignes de courbure planes.

Considérons en second lieu la famille de surfaces minima à laquelle appartient l'alysséide. Si on prend pour axe des z l'axe de l'alysséide, la fonction caractéristique sera $\frac{1}{u^2}$; toute autre surface de la même famille aura une fonction caractéristique de la forme

$$\frac{A}{(u-\alpha)^2(u-\beta)^2}, \quad \text{où} \quad \alpha \gtrless \beta,$$

un des facteurs $u-\alpha$, $u-\beta$ pouvant se réduire à l'unité. Ces surfaces dépendent donc de *six* paramètres arbitraires réels. D'une manière générale, on peut dire que cette famille se compose des surfaces minima, *non algébriques*, à lignes de courbure planes, et des surfaces associées à celles-là. Pour obtenir les surfaces dérivées de l'alysséide, supposons l'axe de dérivation perpendiculaire à un plan méridien et prenons cet axe pour axe des z. Les expressions des coordonnées, d'un point de l'alysséide auront la forme suivante:

$$\left|\begin{aligned} x &= a\mu, \\ y &= a\cos\lambda\cosh\mu, \\ z &= a\sin\lambda\cosh\mu, \end{aligned}\right.$$

λ et μ étant les paramètres des lignes de courbure. On aura de même pour la surface adjointe

$$\left|\begin{aligned} x_0 &= a\lambda, \\ y_0 &= a\sin\lambda\sinh\mu, \\ z_0 &= -a\cos\lambda\sinh\mu. \end{aligned}\right.$$

Appliquons à cette surface les formules générales (14); nous trouvons pour les coordonnées d'un point de la surface dérivée

$$\left|\begin{aligned} x_1 &= a\mu\cosh\varphi - a\sin\lambda\sinh\mu\sinh\varphi, \\ y_1 &= a\cos\lambda\cosh\mu\cosh\varphi + a\lambda\sinh\varphi, \\ z_1 &= a\sin\lambda\cosh\mu; \end{aligned}\right.$$

si on divise par $a \cosh \varphi$ et qu'on pose $\operatorname{tgh} \varphi = h$, ces formules deviennent:

$$\begin{cases} x_1 = \mu - h \sin\lambda \sinh\mu, \\ y_1 = \cos\lambda \cosh\mu + h\lambda, \\ z_1 = \sqrt{1-h^2} \sin\lambda \cosh\mu. \end{cases}$$

Il est aisé de reconnaître qu'elles sont équivalentes aux formules données par M. Darboux (*loc. cit.* p. 315). Le plan tangent a pour équation

$$X \sinh\mu - Y\cos\lambda + Z\left[\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \cosh\mu - \frac{\sin\lambda}{\sqrt{1-h^2}}\right]$$

$$= h\sin\lambda - h\lambda\cos\lambda + \mu\sinh\mu - \cosh\mu.$$

D'une manière générale, proposons-nous de déterminer toutes les familles de surfaces minima qui dépendent de moins de huit paramètres réels. Cela revient à chercher les fonctions $\mathfrak{F}(u)$ telles que les fonctions

$$\frac{A}{(pu+q)^4} \mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right),$$

qui paraissent dépendre de quatre constantes complexes, ne dépendent en réalité que d'un moindre nombre de constantes. S'il en est ainsi, la fonction précédente sera identique à elle-même pour une infinité de valeurs des paramètres A, m, n, p, q, formant une suite continue. En particulier on pourra prendre pour ces paramètres des fonctions continues d'une variable t telles que l'on ait identiquement

$$\frac{A}{(pu+q)^4} \mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right) = \mathfrak{F}(u),$$

et nous supposerons de plus, pour fixer les idées, que pour la valeur $t = 0$, on a

$$A = m = q = 1, \qquad n = p = 0.$$

Egalons à zéro la dérivée de la fonction précédente par rapport au pa-

ramètre t; il vient, en désignant par A', m', n', p', q' les dérivées de A, m, n, p, q

$$\frac{A'(pu+q) - 4A(p'u+q')}{(pu+q)^5}\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right)$$

$$+\frac{A}{(pu+q)^6}[(m'u+n')(pu+q) - (mu+n)(p'u+q')]\mathfrak{F}'\left(\frac{mu+n}{pu+q}\right) = 0.$$

Cette relation est satisfaite identiquement si on a

$$\frac{A'}{4A} = \frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n}$$

ou

$$\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A_1^{\frac{1}{4}}} = \frac{p}{p_1} = \frac{q}{q_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1},$$

A_1, m_1, n_1, p_1, q_1 étant les valeurs des paramètres pour une valeur particulière t_1 de la variable t. Ce résultat était évident à priori d'après l'homogénéité de la fonction caractéristique. Laissant de côté ce cas singulier, faisons $t = 0$ dans la relation précédente; nous voyons que la fonction $\mathfrak{F}(u)$ doit satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} + \frac{4au+b}{au^2+cu+d} = 0.$$

a, b, c, d étant des constantes indépendantes de u. L'intégration ne présente aucune difficulté. Nous distinguerons plusieurs cas:

1°. Soit $a \gtrless 0$; si l'équation

$$au^2 + cu + d = 0$$

a deux racines distinctes α, β, l'équation pourra s'écrire

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} - \frac{k}{u-\alpha} + \frac{k+4}{u-\beta} = 0.$$

et on en tire

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{F}(u) = C\frac{(u-\alpha)^k}{(u-\beta)^{k+4}};$$

2°. Soit $a \gtrless 0$; si l'équation $au^2 + cu + d = 0$ a une racine double α, on aura

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} + \frac{4}{u-\alpha} + \frac{k}{(u-\alpha)^2} = 0.$$

On en tire

(B) $$\mathfrak{F}(u) = \frac{C}{(u-\alpha)^4} e^{\frac{k}{u-\alpha}};$$

3°. Soit $a = 0$, $bc \gtrless 0$. On aura

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} = \frac{k}{u-\alpha},$$

et par suite

(C) $$\mathfrak{F}(u) = C(u-\alpha)^k;$$

4°. Soit $a = 0$, $c = 0$, $b \gtrless 0$. L'équation différentielle devient

$$\frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} = k,$$

et on en tire

(D) $$\mathfrak{F}(u) = Ce^{ku};$$

5°. Soit $a = 0$, $b = 0$. On aura

(E) $$\mathfrak{F}(u) = C.$$

Il est visible que les formes (C) et (E) ne sont que des cas particuliers de la forme (A)

$$\mathfrak{F}(u) = C\frac{(u-\alpha)^k}{(u-\beta)^{k+4}},$$

qui caractérise la famille de surfaces minima dont fait partie la surface ayant pour fonction caractéristique

$$\mathfrak{F}(u) = u^k;$$

cette dernière surface est applicable, comme on sait, sur une surface de révolution ou sur une surface spirale. Comme cette surface est superposable ou semblable à ses associées, il était certain *a priori* que la famille de surfaces minima dont elle fait partie ne pourrait dépendre de

huit paramètres réels arbitraires. Si k est quelconque, le nombre de ces paramètres sera égal à 6; il s'abaisse jusqu'à 4 pour la surface d'Enneper.

Les formes (B) et (D) sont elles-mêmes des cas particuliers de la forme suivante

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{e^{\frac{mu+n}{pu+q}}}{(pu+q)^4};$$

cette fonction $\mathfrak{F}(u)$ ne dépend que de trois constantes complexes. Elle reprend en effet la même valeur si on remplace m, n, p, q par

$$km + 4kpLk,\ kn + 4kqLk,\ kp,\ kq,$$

k étant une constante quelconque. Si on fait subir à la surface minima qui a pour fonction caractéristique la fonction précédente un déplacement réel convenable, il est facile de démontrer qu'on peut la ramener à avoir pour fonction caractéristique une fonction de la forme

$$\mathfrak{F}(u) = e^{au+b+ci},$$

a, b, c étant réels.

11. Imaginons que nous ayons pris un axe de dérivation quelconque passant par l'origine, faisant avec les axes de coordonnées des angles de cosinus a_i, b_i, c_i et soit φ_i le paramètre de dérivation. Les formules (16) et (17) deviennent

$$(16') \qquad ds_i = [\cosh\varphi_i - (a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma)\sinh\varphi_i]\,ds,$$

$$(17') \qquad dA_i = [\cosh\varphi_i - (a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma)\sinh\varphi_i]^2\,dA.$$

Supposons que nous ayons pris cinq surfaces dérivées d'une même surface S, avec des axes et des paramètres de dérivation quelconques. Entre les cinq formules analogues à la formule (16′) nous pourrons éliminer α, β, γ, ds; par suite, *entre les longueurs des arcs correspondants de ces cinq surfaces il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants.* Il peut arriver d'ailleurs qu'on ait une relation de cette espèce en prenant moins de cinq surfaces. Considérons par exemple quatre surfaces dérivées d'une même surface par rapport à quatre axes situés dans un même plan que nous prendrons pour plan des xz; les formules analogues à la formule (16′) ne contiendront plus que α et γ et, en éliminant α, γ

et ds on aura une relation linéaire et homogène entre les longueurs des arcs correspondants de ces quatre surfaces.

Prenons encore trois surfaces dérivées de la première suivant un même axe, que nous prendrons pour axe des z; on aura les trois relations

$$ds_1 = [\cosh\varphi_1 - \gamma \sinh\varphi_1] ds,$$
$$ds_2 = [\cosh\varphi_2 - \gamma \sinh\varphi_2] ds,$$
$$ds_3 = [\cosh\varphi_3 - \gamma \sinh\varphi_3] ds.$$

On en déduit

$$\sinh(\varphi_2 - \varphi_3) ds_1 + \sinh(\varphi_3 - \varphi_1) ds_2 + \sinh(\varphi_1 - \varphi_2) ds_3 = 0$$

et par suite

$$s_1 \sinh(\varphi_2 - \varphi_3) + s_2 \sinh(\varphi_3 - \varphi_1) + s_3 \sinh(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

On verra de même, en partant de la formule (17'), qu'il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants entre les aires correspondantes: 1° de *dix* surfaces dérivées, lorsque les axes et les paramètres de dérivation sont quelconques; 2° de *sept* surfaces, lorsque les axes sont dans un même plan; 3° de *quatre* surfaces dérivées suivant un même axe.

12. La plupart des considérations précédentes s'appliquent, avec quelques changements, aux surfaces minima imaginaires. Soient Γ, Γ_1 deux courbes minima quelconques représentées par les équations

$$\Gamma \begin{cases} X = 2A(t), \\ Y = 2B(t), \\ Z = 2C(t), \end{cases} \qquad \Gamma_1 \begin{cases} X_1 = 2A_1(\tau), \\ Y_1 = 2B_1(\tau), \\ Z_1 = 2C_1(\tau), \end{cases}$$

et soit S la surface minima, en général imaginaire, qui est le lieu des milieux des cordes joignant un point de Γ à un point de Γ_1, surface représentée par les équations

$$S \begin{cases} x = A(t) + A_1(\tau), \\ y = B(t) + B_1(\tau), \\ z = C(t) + C_1(\tau). \end{cases}$$

Supposons que l'on applique à la courbe Γ une transformation homographique conservant le cercle de l'infini, et une autre transformation de même nature à la courbe Γ_1. On obtient deux autres courbes minima Γ'', Γ''_1;

$$\Gamma'' \begin{cases} X' = 2\mathfrak{A}(t), \\ Y' = 2\mathfrak{B}(t), \\ Z' = 2\mathfrak{C}(t), \end{cases} \qquad \Gamma''_1 \begin{cases} X'_1 = 2\mathfrak{A}_1(\tau), \\ Y'_1 = 2\mathfrak{B}_1(\tau), \\ Z'_1 = 2\mathfrak{C}_1(\tau), \end{cases}$$

et une nouvelle surface minima S' représentée par les équations

$$S' \begin{cases} x' = \mathfrak{A}(t) + \mathfrak{A}_1(\tau), \\ y' = \mathfrak{B}(t) + \mathfrak{B}_1(\tau), \\ z' = \mathfrak{C}(t) + \mathfrak{C}_1(\tau). \end{cases}$$

Nous venons d'étudier le cas où les deux courbes Γ, Γ_1 sont imaginaires conjuguées et où on applique à ces deux courbes des déplacements imaginaires conjugués. Considérons maintenant le cas général; nous allons voir que *les coordonnées d'un point de la surface S' s'expriment linéairement au moyen des coordonnées de deux points correspondants de la surface S et de la surface adjointe S_0.*

On a pour expressions des coordonnées d'un point de S_0

$$S_0 \begin{cases} x_0 = i[A(t) - A_1(\tau)], \\ y_0 = i[B(t) - B_1(\tau)], \\ z_0 = i[C(t) - C_1(\tau)], \end{cases}$$

et par suite

$$\begin{aligned} x - ix_0 &= 2A(t), & x + ix_0 &= 2A_1(\tau), \\ y - iy_0 &= 2B(t), & y + iy_0 &= 2B_1(\tau), \\ z - iz_0 &= 2C(t), & z + iz_0 &= 2C_1(\tau). \end{aligned}$$

D'ailleurs $\mathfrak{A}(t)$, $\mathfrak{B}(t)$, $\mathfrak{C}(t)$ sont des fonctions linéaires à coefficients constants de $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$; de même $\mathfrak{A}_1(\tau)$, $\mathfrak{B}_1(\tau)$, $\mathfrak{C}_1(\tau)$ sont des fonctions linéaires à coefficients constants de $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$. Par suite x', y', z' s'exprimeront linéairement au moyen de x, y, z, x_0, y_0, z_0.

Je suppose maintenant que les deux transformations appliquées aux courbes Γ, Γ_1 se réduisent à deux déplacements indépendants l'un de l'autre. Faisons correspondre les points des deux surfaces S, S' qui répondent aux mêmes valeurs de t et de τ; alors *les lignes de courbure et les lignes asymptotiques se correspondent respectivement sur ces deux surfaces.* On le démontre facilement en prenant les équations de ces surfaces sous la forme générale qui précède. Désignons pour abréger par A', B', C', A'', B'', C''; $A'_1, B'_1, C'_1, A''_1, B''_1, C''_1$ les dérivées de A, B, C; A_1, B_1, C_1 prises par rapport à t et à τ respectivement. Des relations

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 0,$$

$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0$$

on tire

$$\frac{A'}{B'C'' - C'B''} = \frac{B'}{C'A'' - A'C''} = \frac{C'}{A'B'' - B'A''};$$

posons

$$I(t) = \frac{A'B'' - B'A''}{C'} = \frac{B'C'' - C'B''}{A'} = \frac{C'A'' - A'C''}{B'}.$$

Soient

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}$$

les coefficients d'une substitution orthogonale de déterminant $+1$; des égalités précédentes on tire

$$I(t) = \frac{(a'b'' - b'a'')(A'B'' - B'A'') + (b'c'' - c'b'')(B'C'' - C'B'') + (c'a'' - a'c'')(C'A'' - A'C'')}{aA' + bB' + cC'}$$

$$= \frac{(a'A' + b'B' + c'C')(a''A'' + b''B'' + c''C'') - (a''A' + b''B' + c''C')(a'A'' + b'B'' + c'C'')}{aA' + bB' + cC'}.$$

On voit donc que $I(t)$ est un invariant relativement à toute substitution orthogonale de déterminant $+1$ effectuée sur les fonctions A, B, C. De même, si on pose

$$I_1(\tau) = \frac{A'_1B''_1 - B'_1A''_1}{C'_1} = \frac{B'_1C''_1 - C'_1B''_1}{A'_1} = \frac{C'_1A''_1 - A'_1C''_1}{B'_1},$$

$I_1(\tau)$ sera un invariant relativement à toute substitution orthogonale de déterminant $+1$ effectuée sur les fonctions A_1, B_1, C_1. On sait que l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface S est

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & A_1' \\ B' & B'' & B_1' \\ C' & C'' & C_1' \end{vmatrix} dt^2 + \begin{vmatrix} A_1' & A' & A_1'' \\ B_1' & B' & B_1'' \\ C_1' & C' & C_1'' \end{vmatrix} d\tau^2 = 0,$$

ou, en développant et en supprimant le facteur commun $A'A_1'+B'B_1'+C'C_1'$,

$$I(t)dt^2 - I_1(\tau)d\tau^2 = 0.$$

De même l'équation différentielle des lignes de courbure sera

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \\ du & dv & dw \end{vmatrix} = 0$$

où

$$u = B'C_1' - C'B_1', \qquad v = C'A_1' - A'C_1', \qquad w = A'B_1' - B'A_1';$$

en développant et réduisant les termes semblables, il vient pour cette équation

$$I(t)dt^2 + I_1(\tau)d\tau^2 = 0.$$

Puisque $I(t)$, $I_1(\tau)$ sont des invariants relativement à toute substitution orthogonale de déterminant $+1$, on voit aussitôt que ces équations sont les mêmes pour les deux surfaces S et S': d'où résulte la proposition générale énoncée plus haut.

Ce théorème se démontre aussi très simplement au moyen des formules de M. Weierstrass. Regardons les deux courbes minima Γ, Γ_1 comme les arêtes de rebroussement des deux développables enveloppes des plans

$$\begin{cases} (1-u^2)X + i(1+u^2)Y + 2uZ + 4f(u) = 0, \\ (1-u_1^2)X - i(1+u_1^2)Y + 2u_1Z + 4f_1(u_1) = 0; \end{cases}$$

la surface minima S sera représentée par les équations

$$\begin{cases} x = \int (1 - u^2)\mathfrak{F}(u)\,du + \int (1 - u_1^2)\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ y = \int i(1 + u^2)\mathfrak{F}(u)\,du - \int i(1 + u_1^2)\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ z = \int 2u\mathfrak{F}(u)\,du + \int 2u_1\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \end{cases}$$

où

$$\mathfrak{F}(u) = f'''(u), \qquad \mathfrak{F}_1(u) = f_1'''(u_1).$$

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques seront données par les équations différentielles

$$\mathfrak{F}(u)\,du^2 - \mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0,$$

$$\mathfrak{F}(u)\,du^2 + \mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0.$$

Si on suppose maintenant que les courbes Γ, Γ_1 subissent des déplacements, les fonctions $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$ sont remplacées par des fonctions $\mathfrak{G}(v)$, $\mathfrak{G}_1(v_1)$ de la forme suivante

$$\mathfrak{G}(v) = \mathfrak{F}\left(\frac{mv + n}{pv + q}\right)\frac{(mq - np)^2}{(pv + q)^4},$$

$$\mathfrak{G}_1(v_1) = \mathfrak{F}_1\left(\frac{m_1v_1 + n_1}{p_1v_1 + q_1}\right)\frac{(m_1q_1 - n_1p_1)^2}{(p_1v_1 + q_1)^4},$$

et les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques deviennent respectivement

$$\mathfrak{G}(v)\,dv^2 - \mathfrak{G}_1(v_1)\,dv_1^2 = 0,$$

$$\mathfrak{G}(v)\,dv^2 + \mathfrak{G}_1(v_1)\,dv_1^2 = 0;$$

ces équations sont identiques aux premières où l'on aurait fait le changement de variables

$$u = \frac{mv + n}{pv + q}, \qquad u_1 = \frac{m_1v_1 + n_1}{p_1v_1 + q_1}.$$

Nous voyons de plus que, si on connaît l'image sphérique d'une ligne de la première surface, pour avoir l'image sphérique de la ligne corres-

pondante de la seconde surface, il suffit de faire la transformation précédente. Une telle transformation change les cercles en cercles; par suite toute ligne de courbure plane se change en une ligne de courbure plane et toute ligne asymptotique hélicoïdale en une ligne asymptotique hélicoïdale.

Pour donner un exemple de la transformation générale qui précède, reprenons la surface représentée par les équations (14) [§ 6]. Rien n'empêche de supposer que la surface S d'où l'on part est imaginaire ainsi que le paramètre k; les propositions qui ont été démontrées sont encore vraies dans ce cas. La surface S étant considérée comme le lieu des milieux des cordes qui joignent un point d'une courbe minima Γ à un point d'une autre courbe minima Γ_1, on obtiendra la nouvelle surface minima représentée par les équations (14) en faisant subir aux deux courbes Γ, Γ_1 des rotations égales et de sens contraires autour de l'axe Oz. Je dirai encore que la nouvelle surface est dérivée de la première.

13. Nous avons vu au paragraphe 6 que deux surfaces minima dérivées l'une de l'autre jouissaient de la propriété suivante. Si on considère les sections de ces deux surfaces par un même plan perpendiculaire à l'axe de dérivation et qu'on fasse correspondre les points de ces deux sections où les tangentes sont parallèles, on obtient un mode de correspondance entre les deux surfaces tel que l'angle de deux courbes quelconques tracées sur l'une d'elles est égal à l'angle des courbes correspondantes sur l'autre surface. On exprime ce fait en disant que les deux surfaces sont appliquées *conformément* l'une sur l'autre. Cette propriété appartient aussi aux surfaces de révolution. Soit Oz l'axe de la surface et

$$x = \varphi(z)$$

l'équation de la méridienne dans le plan des xz; l'élément linéaire sera donné par la formule

$$ds^2 = \varphi^2(z)d\omega^2 + [1 + \varphi'^2(z)]dz^2,$$

ω désignant l'angle d'un plan méridien avec le plan xOz. Soit maintenant

$$x = \psi(z)$$

la méridienne d'une autre surface de révolution, dont l'élément linéaire sera donné par la formule

$$ds_1^2 = \psi^2(z)d\omega^2 + [1 + \psi'^2(z)]dz^2.$$

Faisons correspondre les points des deux surfaces qui répondent aux mêmes valeurs de z et de ω; pour que ces deux surfaces soient appliquées conformément l'une sur l'autre, il faut et il suffit que le rapport $\frac{ds_1}{ds}$ ne dépende que de ω et de z, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{1 + \varphi'^2(z)}{\varphi^2(z)} = \frac{1 + \psi'^2(z)}{\psi^2(z)}. \tag{24}$$

La première surface étant donnée, on connaîtra la fonction φ et on aura pour déterminer ψ une équation différentielle du premier ordre admettant φ comme intégrale particulière. Il est aisé d'interpréter la relation (24); soient C, C' les deux méridiennes du plan xOz, M et M' deux points de ces courbes situés sur une même parallèle $MM'P$ à l'axe Ox. La formule (24) exprime précisément que la projection de MP sur la normale MN à la courbe C est égale à la projection de $M'P$ sur la normale $M'N'$ à la courbe C'.

Supposons en particulier que la première surface soit un cylindre de révolution; alors $\varphi(z) = a$ et l'équation (24) devient

$$1 + \psi'^2(z) = \frac{\psi^2(z)}{a^2}.$$

L'intégrale générale est

$$x = \psi(z) = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{z-z_0}{a}} + e^{\frac{z_0-z}{a}}\right];$$

elle représente des chaînettes égales tangentes à la droite $x = a$, qui est alors une intégrale singulière. Ceci nous conduit à quelques propriétés curieuses de l'alysséide. Si on considère l'alysséide et le cylindre circonscrit suivant le cercle de gorge et qu'on fasse correspondre les points des deux surfaces situés sur une même droite perpendiculaire à Oz et rencontrant cet axe, les angles se conservent dans ce mode de correspondance. Les lignes asymptotiques de l'alysséide ont pour transformées

des hélices inclinées à 45° sur les génératrices du cylindre, de sorte que ces lignes asymptotiques sont à l'intersection de l'alysséide et des hélicoïdes ayant Oz pour axe et égaux à l'hélicoïde adjoint.

Si on développe ensuite la surface du cylindre sur un plan, on obtiendra une carte de la surface de l'alysséide dans laquelle les lignes de courbure seront représentées par deux faisceaux rectangulaires de droites parallèles.

14. Nous sommes ainsi amenés à l'examen de la question suivante de Géométrie, par lequel je vais terminer. Etant données deux surfaces quelconques S, S_1, on prend les sections des deux surfaces par un plan variable parallèle à un plan fixe, et on fait correspondre les points de ces deux sections où les tangentes sont parallèles: dans quels cas obtient-on une application conforme des deux surfaces l'une sur l'autre par ce mode de correspondance?

Je prends le plan fixe pour plan des xy et j'appelle x, y, z; x_1, y_1, z les coordonnées de deux points correspondants des deux surfaces; ces coordonnées sont supposées exprimées en fonction de deux variables indépendantes α, β. D'après l'énoncé du problème, on aura d'abord la relation

$$(25)\qquad dx_1^2 + dy_1^2 + dz^2 = k(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

D'autre part, le plan tangent à la première surface aura pour équation

$$(X - x)\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}\right) + (Y - y)\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)$$
$$+ (Z - z)\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}\right) = 0.$$

et le coefficient angulaire de la trace de ce plan sur le plan des xy sera

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} - \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial y}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} - \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x}{\partial \beta}},$$

et on aura une expression toute pareille pour le plan tangent à la seconde surface. On en tire une nouvelle équation de condition

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}-\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \beta}-\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)=\left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}-\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}-\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right).$$

ou, en développant,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y_1}{\partial \beta}-\frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}-\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)\\ &+\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\left[\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \beta}+\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}-\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}-\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \beta}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Il s'agit de trouver cinq fonctions x, y, x_1, y_1, z des variables α et β vérifiant les relations (25) et (26). Imaginons que nous ayons pris pour variables α et β les paramètres des lignes de longueur nulle de la première surface. L'équation (25) pourra être remplacée par les relations ci-dessous

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2=0,\\ &\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2=0;\end{aligned}\right.$$

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2=0,\\ &\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2=0.\end{aligned}\right.$$

Posons

$$x=\frac{u+u_0}{2},\qquad x_1=\frac{v+v_0}{2},$$

$$y=i\,\frac{u_0-u}{2},\qquad y_1=i\,\frac{v_0-v}{2};$$

d'où

$$u=x+iy,\qquad v=x_1+iy_1,$$

$$u_0=x-iy,\qquad v_0=x_1-iy_1.$$

Des relations (27) et (28) on tire

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial v}{\partial \alpha}\dfrac{\partial v_0}{\partial \alpha} = -\left(\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta} = \dfrac{\partial v}{\partial \beta}\dfrac{\partial v_0}{\partial \beta} = -\left(\dfrac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2. \end{cases}$$

On satisfait aux équations (29) de la façon la plus générale en prenant:

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} = e^{i\varphi}\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \\[2ex] \dfrac{\partial v_0}{\partial \alpha} = e^{-i\varphi}\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}, \end{cases} \qquad (30')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} = e^{i\omega}\dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \\[2ex] \dfrac{\partial v_0}{\partial \beta} = e^{-i\omega}\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}, \end{cases}$$

φ et ω étant deux nouvelles fonctions de α et de β. Si on remplace x, y, x_1, y_1 par leurs valeurs dans l'équation de condition (26), elle devient, après quelques réductions faciles,

$$\sin\frac{\omega+\varphi}{2}\left[e^{\frac{i(\omega-\varphi)}{2}}\left\{\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\right\}+e^{\frac{i(\varphi-\omega)}{2}}\left\{\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}+\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \beta}\right\}\right]=0.$$

On peut satisfaire à cette équation de deux manières: 1° en prenant $\omega + \varphi = 0$; 2° en posant

$$e^{i(\varphi-\omega)} = -\frac{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta}+\dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta}+\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial \beta}}.$$

Cette dernière solution est illusoire; en effet, on vérifie aisément, en tenant compte des équations (29), que l'on aurait

$$e^{i(\varphi-\omega)} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial \beta}\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta}},$$

et les équations (30) nous donneraient

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v_0}{\partial \beta}-\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial v_0}{\partial \alpha}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}-\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha}=0.$$

de sorte que le point x_1, y_1, z décrirait, non pas une surface, mais une courbe, qui serait forcément une courbe minima. Il est aisé de s'expliquer la présence de cette solution étrangère. En effet, si on a une surface quelconque S et une courbe minima quelconque Γ et qu'on fasse correspondre tous les points de la surface S situés dans un plan parallèle au plan xOy au point unique de la courbe Γ situé dans ce plan, il est évident que la relation (25) sera satisfaite puisque on aura

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz^2 = 0.$$

D'autre part les quantités

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial x_1}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y_1}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

sont identiquement nulles et la relation (26) est vérifiée également.

Nous voyons par conséquent que, pour avoir une véritable solution, il nous faudra prendre

$$\omega + \varphi = 0$$

et les relations (30) et (30') pourront s'écrire

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} &= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial \beta}, \end{aligned}\right. \qquad (31')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial v_0}{\partial \beta} &= \lambda \frac{\partial u_0}{\partial \beta}. \end{aligned}\right.$$

Ecrivons les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda \frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha};$$

on en tire les relations

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} &= \lambda(1 - \lambda^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} + \lambda^2 \frac{\partial u_0}{\partial \beta}\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} &= \lambda(1 - \lambda^2)\frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha \partial \beta}, \end{aligned}\right.$$

qui ne contiennent plus que les coordonnées u, u_0 de la première surface. Ces équations admettent toujours les deux solutions $\lambda = \pm 1$. Les surfaces S_1 que l'on obtient ainsi se déduisent de la surface S par une translation parallèle au plan des xy ou par une rotation de $180°$ autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. Ces solutions étaient d'ailleurs évidentes *a priori*.

On aperçoit immédiatement un autre cas particulier où les équations (32) admettent une infinité d'intégrales: c'est celui où la surface S est une surface minima. On a en effet dans ce cas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta} = 0,$$

et on satisfait aux équations (32) en prenant pour λ une constante quelconque. Des équations (31) on tire alors

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial\alpha\partial\beta} = 0;$$

ce qui nous montre que la seconde surface sera aussi une surface minima. Si on poursuit le calcul, ce qui n'offre aucune difficulté, on reconnait que la surface S_1 est précisément une surface dérivée de S avec Oz pour axe de dérivation.

Prenons maintenant le cas général; les équations (32) peuvent se simplifier un peu en prenant pour nouvelle inconnue $\lambda^2 = \rho$. Elles deviennent, en les multipliant par 2λ,

$$\left\{\begin{aligned} &\rho\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = 2\rho(1-\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta},\\ &\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial\beta} + \rho\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = 2\rho(1-\rho)\frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta};\end{aligned}\right.$$

si on résout par rapport à $\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}, \frac{\partial\rho}{\partial\beta}$, on trouve

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\rho^2\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right]\frac{\partial\rho}{\partial\beta} = 2\rho(1-\rho)\left[\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial u_0}{\partial\beta} - \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta}\right],\\ &\left[\rho^2\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right]\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = 2\rho(1-\rho)\left[\rho\frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right].\end{aligned}\right.$$

Ecartons le cas où on aurait une solution en prenant

$$\rho^2\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u_0}{\partial\beta}-\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}=0;$$

on aurait alors

$$\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v_0}{\partial\beta}-\frac{\partial v}{\partial\beta}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}=0$$

et la surface S_1 serait un cylindre ayant ses génératrices parallèles à Oz. Ce cas sera examiné plus loin.

Si l'on veut qu'il y ait une infinité de surfaces S_1 correspondant à une surface donnée S, la condition d'intégrabilité du système (33)

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{\partial^2\rho}{\partial\beta\partial\alpha}$$

devra être satisfaite identiquement. Le calcul un peu long n'offre aucune difficulté et on est conduit aux conditions suivantes:

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left[\log\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\right]=\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left[\log\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right],\tag{34}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left[\log\frac{\partial u}{\partial\beta}\right]=\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left[\log\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\right],\tag{35}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial\beta}\dfrac{\partial^2u_0}{\partial\alpha\partial\beta}}{\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}}\right]=\left(\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\right)^2\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial^2u}{\partial\alpha\partial\beta}}{\dfrac{\partial u_0}{\partial\beta}}\right],\tag{36}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)^2\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial\alpha}\dfrac{\partial^2u_0}{\partial\alpha\partial\beta}}{\dfrac{\partial u}{\partial\beta}}\right]=\left(\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\right)^2\frac{\partial u_0}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial^2u}{\partial\alpha\partial\beta}}{\dfrac{\partial u_0}{\partial\alpha}}\right].\tag{37}$$

Des relations (34) et (35) on tire

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}&=\varphi(\alpha)\psi(\beta)\frac{\partial u}{\partial\beta},\\ \frac{\partial u_0}{\partial\beta}&=\varphi_1(\alpha)\psi_1(\beta)\frac{\partial u}{\partial\alpha},\end{aligned}\right.\tag{38}$$

$\varphi(\alpha)$ et $\varphi_1(\alpha)$ ne dépendant que de α, $\psi(\beta)$ et $\psi_1(\beta)$ ne dépendant que de β. Si on porte ces valeurs de $\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u_0}{\partial \beta}$ dans les formules (29) et qu'on élimine $\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}$, on voit que la fonction z doit vérifier une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\pi_1(\beta)\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \pi(\alpha)\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = F[\Phi(\alpha) + \Psi(\beta)],$$

en posant:

$$\Phi(\alpha) = \int \pi(\alpha) d\alpha, \qquad \Psi(\beta) = \int \pi_1(\beta) d\beta.$$

Comme les variables α et β peuvent toujours être remplacées par deux nouvelles variables ne dépendant respectivement que de chacune des premières, rien n'empêche de supposer que l'on a pris pour variables les fonctions $\Phi(\alpha)$, $\Psi(\beta)$ elles-mêmes. Alors la coordonnée z aura pour expression

$$z = F(\alpha + \beta). \tag{39}$$

On déduit de là une conséquence importante; puisque les lignes

$$\alpha + \beta = Const., \qquad \alpha - \beta = Const.$$

forment sur la surface deux systèmes orthogonaux et isothermes, nous voyons que *les sections de la surface S par des plans parallèles au plan des xy forment un système isotherme.*

Soit

$$f(\alpha + \beta) = -[F'(\alpha + \beta)]^2;$$

les formules (29) deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} = f(\alpha + \beta). \tag{40}$$

On en déduit

$$\frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial\beta}}{\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}} = \frac{\dfrac{\partial u_0}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial u}{\partial\beta}},$$

et les formules (38) deviennent:

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial\alpha} = \varphi(\alpha)\psi(\beta)\dfrac{\partial u}{\partial\beta}, \\[2ex] \dfrac{\partial u_0}{\partial\beta} = \varphi(\alpha)\psi(\beta)\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}. \end{cases}$$

Combinées avec les formules (40), elles donnent

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} = \dfrac{f(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha)\psi(\beta)}, \\[2ex] \dfrac{\partial u_0}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u_0}{\partial\beta} = \varphi(\alpha)\psi(\beta)f(\alpha+\beta). \end{cases}$$

Des relations (40) on tire

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{f'(\alpha+\beta)}{\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}} - f(\alpha+\beta)\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2}$$

$$= \frac{f'(\alpha+\beta)}{\dfrac{\partial u}{\partial\beta}} - f(\alpha+\beta)\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial\beta}\right)^2};$$

on peut satisfaire à cette relation de deux manières: 1° en prenant

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{\partial u}{\partial\beta},$$

mais on aurait aussi $\dfrac{\partial u_0}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial u_0}{\partial\beta}$ et la surface S se réduirait à une courbe; 2° en posant

$$\frac{f'(\alpha+\beta)}{f(\alpha+\beta)} = \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\left[\frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}} + \frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial\beta}}\right].$$

La première des équations (42) nous donne aussi

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}}{\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}} + \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}}{\dfrac{\partial u}{\partial\beta}} = \frac{f'(\alpha+\beta)}{f(\alpha+\beta)} - \frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)}.$$

Ajoutons membre à membre les équations précédentes; il vient

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} L\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta} L\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = \frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)}.$$

Par conséquent $\frac{\partial u}{\partial\beta}$ sera de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial\beta} = \frac{\pi(\alpha+\beta)}{\psi(\beta)};$$

on aura de même

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{\pi_1(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha)},$$

les fonctions π, π_1 vérifiant la condition

$$\pi(\alpha+\beta).\pi_1(\alpha+\beta) = f(\alpha+\beta).$$

On en tire encore

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\pi'(\alpha+\beta)}{\psi(\beta)} = \frac{\pi_1'(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha)};$$

si les fonctions π, π_1 sont des constantes, cette condition est satisfaite identiquement, et on retombe sur le cas déjà considéré des surfaces minima. S'il en est autrement, il faudra que le rapport $\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\beta)}$ ne dépende que de $\alpha+\beta$, et par suite que

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\beta)}\right) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\beta)}\right),$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{\psi(\beta)} = -\frac{\psi'(\beta)\varphi(\alpha)}{\psi^2(\beta)}.$$

ou

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = -\frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)}.$$

La valeur commune des rapports précédents sera forcément une constante indépendante de α et de β, et on aura

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = m, \qquad \frac{\psi'(\beta)}{\psi(\beta)} = -m;$$

on en tire

$$\varphi(\alpha) = ae^{m\alpha}, \qquad \psi(\beta) = be^{-m\beta},$$

a et b désignant deux nouvelles constantes, et finalement on obtient les formules

$$(43) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} = \dfrac{1}{a} e^{-m\alpha} \pi_1(\alpha + \beta), \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \beta} = \dfrac{1}{b} e^{m\beta} \pi(\alpha + \beta); \end{cases}$$

$$(44) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha} = ae^{m\alpha} \pi(\alpha + \beta), \\[2ex] \dfrac{\partial u_0}{\partial \beta} = be^{-m\beta} \pi_1(\alpha + \beta), \end{cases}$$

où

$$\pi(\alpha + \beta) . \pi_1(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta).$$

Les relations (40) et (41) sont satisfaites et les conditions d'intégrabilité des deux systèmes (43) et (44) se reduisent à une seule

$$\pi_1'(\alpha + \beta) = \frac{a}{b} e^{m(\alpha+\beta)} \pi'(\alpha + \beta).$$

On vérifie facilement que les autres conditions d'intégrabilité du système (33) sont vérifiées identiquement.

Pour interpréter géométriquement les relations (43) formons l'équation du plan tangent à la surface S

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

On aura

$$A = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{i}{2}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_0}{\partial \beta}\right]$$

$$= \frac{i}{2}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\left[\left(ae^{m\alpha} + \frac{1}{b}e^{m\beta}\right)\pi(\alpha+\beta) - \left(\frac{1}{a}e^{-m\alpha} + be^{-m\beta}\right)\pi_1(\alpha+\beta)\right],$$

$$B = \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial u_0}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\left[\left(\frac{1}{b}e^{m\beta} - ae^{m\alpha}\right)\pi(\alpha+\beta) + \left(be^{-m\beta} - \frac{1}{a}e^{-m\alpha}\right)\pi_1(\alpha+\beta)\right],$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u_0}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial u_0}{\partial \alpha}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left[\frac{b}{a}e^{-m(\alpha+\beta)}\pi_1^2(\alpha+\beta) - \frac{a}{b}e^{m(\alpha+\beta)}\pi^2(\alpha+\beta)\right].$$

On en tire

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2\left[-4\frac{a}{b}e^{m(\alpha+\beta)}\pi^2(\alpha+\beta) - 4\frac{b}{a}e^{-m(\alpha+\beta)}\pi_1^2(\alpha+\beta)\right.$$
$$\left. + 8\pi(\alpha+\beta)\pi_1(\alpha+\beta)\right].$$

Nous voyons que C et $A^2 + B^2$, et par suite $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, ne dépendent que de $\alpha + \beta$ ou, ce qui revient au même, de z. Par conséquent, le plan tangent à la surface le long d'une section par un plan parallèle au plan xOy coupe ce plan sous un angle constant. La surface admet une série de lignes de courbure situées dans des plans parallèles; c'est donc une *surface moulure*.

15. Ce point étant démontré, il est commode pour achever le calcul d'employer un autre système de variables indépendantes. Choisissons comme variables la coordonnée z et l'angle α que fait avec Ox la trace du plan tangent sur le plan des xy. L'intersection du plan tangent au point M de coordonnées x, y, z avec le plan $Z = z$ aura pour équation

$$X\cos\alpha + Y\sin\alpha = F(\alpha, z);$$

les coordonnées du point M seront données par les deux équations

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = F(\alpha, z),$$

$$-x \sin\alpha + y \cos\alpha = \frac{\partial F}{\partial \alpha};$$

on en tire

$$\left\{\begin{aligned} x &= \cos\alpha F(\alpha, z) - \sin\alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \\ y &= \sin\alpha F(\alpha, z) + \cos\alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} dx &= -\sin\alpha\left[F(\alpha, z) + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right]d\alpha + \left[\cos\alpha \frac{\partial F}{\partial z} - \sin\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z}\right]dz, \\ dy &= \cos\alpha\left[F(\alpha, z) + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right]d\alpha + \left[\sin\alpha \frac{\partial F}{\partial z} + \cos\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z}\right]dz, \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left[F(\alpha, z) + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right]^2 d\alpha^2 \\ &\quad + 2\left[F(\alpha, z) + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right]\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z} d\alpha\, dz + \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z}\right)^2\right]dz^2. \end{aligned}\right.$$

Sur une surface moulure, les lignes

$$\alpha = Const., \qquad z = Const.$$

forment un système orthogonal. On doit donc avoir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z} = 0,$$

et par suite $F(\alpha, z)$ devra être de la forme

$$F(\alpha, z) = f(\alpha) + \varphi(z).$$

L'expression de ds^2 devient

$$ds^2 = [f(\alpha) + f''(\alpha) + \varphi(z)]^2 d\alpha^2 + [1 + \varphi'(z)^2]dz^2.$$

Pour que les courbes $z = Const.$ forment un système isotherme, il faudra

évidemment que le coefficient de $d\alpha^2$ soit le produit d'une fonction de α par une fonction de z. Or cela ne peut arriver que dans deux cas:

1°. Si on a $f(\alpha) + f''(\alpha) = a$; on aura alors

$$f(\alpha) = a + C\cos\alpha + C'\sin\alpha$$

et la trace du plan tangent sur le plan $Z = z$ aura pour équation

$$(X - C)\cos\alpha + (Y - C')\sin\alpha = \varphi(z),$$

en réunissant la constante a à $\varphi(z)$. Cette trace est constamment tangente à un cercle de rayon $\varphi(z)$ ayant son centre au point $x = C$, $y = C'$. La surface est donc une surface de révolution autour de la parallèle à Oz représentée par ces deux équations. Imaginons que nous ayons pris cette droite pour l'axe Oz lui-même; on pourra supposer dans ce qui précède $f(\alpha) = 0$. Considérons ensuite une autre surface dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds_1^2 = [f_1(\alpha) + f_1''(\alpha) + \varphi_1(z)]^2 d\alpha^2 + [1 + \varphi_1'(z)^2]dz^2;$$

le rapport $\frac{ds_1}{ds}$ ne dépendra que de α et de z si on a

$$\left[\frac{f_1(\alpha) + f_1''(\alpha) + \varphi_1(z)}{\varphi(z)}\right]^2 = \frac{1 + \varphi_1'(z)^2}{1 + \varphi'(z)^2}.$$

Pour que cette relation puisse avoir lieu, il faut évidemment que

$$f_1(\alpha) + f_1''(\alpha)$$

se réduise à une constante; on en déduira comme tout-à-l'heure que la seconde surface est une surface de révolution autour d'une droite parallèle à Oz. Si on amène l'axe de cette surface à coïncider avec Oz, on pourra prendre $f_1(\alpha) = 0$, et on retombe sur la relation déjà obtenue directement

$$\frac{1 + \varphi_1'(z)^2}{\varphi_1(z)^2} = \frac{1 + \varphi'(z)^2}{\varphi(z)^2}:$$

2°. Les courbes $z = Const.$ forment encore un système isotherme si $\varphi(z)$ est constant, c'est-à-dire si la surface considérée est un cylindre ayant ses génératrices parallèles à Oz. On démontre aisément que la

seconde surface devra être un cylindre égal au premier à moins que le cylindre ne soit de révolution, cas qui a déjà été considéré.

En définitive, il n'y a pas d'autres surfaces jouissant de la propriété géométrique en question que les surfaces minima et les surfaces de révolution.

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une note présentée à l'Académie des Sciences le 24 Octobre 1887 (Comptes rendus, t. **105**, p. 743).

Paris, Novembre 1887.

ÜBER DIE ENTWICKLUNG COMPLEXER GRÖSSEN IN KETTENBRÜCHE

VON

A. HURWITZ
in KÖNIGSBERG i/Pr.

Es möge (S) ein System von Zahlen bezeichnen, welches die Eigenschaft besitzt, dass die Summe, die Differenz und das Produkt irgend zweier Zahlen des Systems wieder Zahlen des Systems sind.[1] Wenn die complexen Grössen in der üblichen Weise durch die Punkte einer Ebene dargestellt werden, so wird den Zahlen von (S) ein gewisses System von Punkten entsprechen. Ich nehme an, das System (S) sei so beschaffen, dass von diesen Punkten in jedem endlichen Gebiete der Ebene nur eine endliche Anzahl liegt. Daraus folgt, dass ausser der Null keine andere Zahl von (S) existirt, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist. Denn die Potenzen dieser Zahl würden sämmtlich Zahlen von (S) sein und im Innern des um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises liegen. Eine letzte Voraussetzung, die ich in Betreff des Systems (S) mache, ist die, dass die Zahl 1 dem Systeme angehört.

Von einer Grösse x_0 ausgehend bilde ich nun die Gleichungskette:

$$(1) \qquad x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad \ldots$$

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \ldots$$

[1] Eine Theorie solcher Zahlsysteme ist in den bekannten Arbeiten von KRONECKER und DEDEKIND, vorzugsweise für den Fall algebraischer Zahlen, entwickelt. Vgl. insbesondere das XI. Supplement zu DIRICHLET's Vorlesungen über Zahlentheorie. Dritte Auflage.

Acta mathematica. 11. Imprimé le 6 Mars 1888.

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ irgend welche Zahlen des Systems (S) bedeuten. Ich nehme an, dass sich die Gleichungskette (1) in's Unendliche fortsetzt, und dass alle auftretenden Grössen $x_1, x_2, \ldots$ sowie die Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ endliche Werthe besitzen. Die Elimination von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus den ersten $n+1$ Gleichungen (1) ergiebt die Darstellung von x_0 in Form eines Kettenbruches, welchen ich mit

(2) $$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1})$$

bezeichnen will und über welchen ich folgende Voraussetzungen mache:

(V) *Wenn der n^{te} Näherungsbruch mit*

(3) $$\frac{p_n}{q_n} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

bezeichnet, und

(4) $$x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n}{q_n^2}$$

gesetzt wird, so sei der absolute Betrag von θ_n für alle Werthe von n kleiner als eine endliche Grösse ρ, dagegen wachse der absolute Betrag von q_n mit zunehmendem n über alle Grenzen.

Falls alle diese Voraussetzungen zutreffen, lässt sich Folgendes erschliessen:

Erstens; Der in's Unendliche fortgesetzte Kettenbruch

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

convergirt und sein Werth ist x_0. Denn der Gleichung (4) zufolge wird die Differenz $x_0 - \frac{p_n}{q_n}$ unendlich klein, wenn n über alle Grenzen wächst.

Zweitens; Die Grösse x_0 kann nicht gleich dem Quotienten zweier Zahlen r, s des Systems (S) sein. Angenommen nämlich es sei $x_0 = \frac{r}{s}$, so folgt

$$rq_n - sp_n = \frac{s \cdot \theta_n}{q_n}.$$

Mit wachsendem n wird daher $rq_n - sp_n$ dem absoluten Betrage nach

unendlich klein. Wählt man nun n so gross, dass dieser absolute Betrag kleiner ist als 1, so muss

$$rq_n - sp_n = 0$$

sein, weil 0 die *einzige* Zahl des Systems (S) ist, deren absoluter Betrag kleiner ist als 1. Es ist also

$$x_0 = \frac{r}{s} = \frac{p_n}{q_n} = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit (2) ergiebt $x_{n+1} = \infty$, was der Annahme alle Grössen $x_1, x_2, \ldots$ seien endlich widerstreitet.

Drittens: *Genügt die Grösse x_0 einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten Zahlen des Systems (S) sind, so kommen in der unendlichen Reihe*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

nur eine endliche Anzahl verschiedener Grössen vor.

Ich entwickle, um den Beweis dieses Satzes zu führen, zunächst einige Hülfsformeln. Bekanntlich ist

$$x_0 = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}, \tag{5}$$

woraus, in Rücksicht auf die Relation

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}, \tag{6}$$

folgt:

$$\left\{\begin{aligned} x_0 - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{(-1)^n}{q_n^2\left(x_{n+1} + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}, \\ x_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} &= \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}^2\left(\dfrac{1}{x_{n+1}} + \dfrac{q_n}{q_{n-1}}\right)}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Vergleicht man diese Formeln mit der Gleichung (4), so ergiebt sich

$$\left\{\begin{aligned} x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} &= \frac{(-1)^n}{\theta_n}, \\ \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{q_n}{q_{n-1}} &= \frac{(-1)^{n-1}}{\theta_{n-1}}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Daher ist der absolute Betrag sowohl von

$$x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}, \quad \text{wie von} \quad \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

stets grösser als $\rho' = \frac{1}{\rho}$, wo die Grösse ρ' von Null verschieden ist. Sei nun

$$(9) \qquad Ax^2 + Bx + C = 0$$

die Gleichung, welcher x_0 genügt; sei ferner

$$(10) \qquad B^2 - 4AC = D.$$

Dann ist x_{n+1}, der Gleichung (5) zufolge, Wurzel der Gleichung

$$A(p_n x' + p_{n-1})^2 + B(p_n x' + p_{n-1})(q_n x' + q_{n-1}) + C(q_n x' + q_{n-1})^2 = 0,$$

welche in geordneter Form

$$(11) \qquad A'x'^2 + B'x' + C' = 0$$

lauten möge. Hier bezeichnen A', B', C' Zahlen des Systems (S), und es ist

$$(12) \qquad B'^2 - 4A'C' = D.$$

Bezeichnet nun y_{n+1} die zweite Wurzel von (11), so ist die Grösse

$$(13) \qquad y_0 = \frac{p_n y_{n+1} + p_{n-1}}{q_n y_{n+1} + q_{n-1}}$$

die zweite Wurzel der Gleichung (9). Diese zweite Wurzel y_0 ist von der ersten Wurzel x_0 verschieden, weil andernfalls $y_0 = x_0 = \frac{-B}{2A}$ der Quotient zweier Zahlen des Systems (S) sein würde, was, wie oben gezeigt wurde, nicht sein kann. Aus (13) folgt:

$$y_{n+1} = \frac{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}}{-q_n y + p_n} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{(-1)^{n-1}}{-q_n^2 y_0 + p_n q_n},$$

oder, wenn p_n mit Hülfe von (4) eliminirt wird:[1]

$$(14) \qquad y_{n+1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n^2(x_0 - y_0) - \theta_n}.$$

Da nun $x_0 - y_0$ eine von Null verschiedene Grösse ist, die von n unabhängig ist, so werden in den Gleichungen

$$(15) \qquad y_{n+1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} + \varepsilon_n, \qquad \frac{1}{y_{n+1}} = -\frac{q_n}{q_{n-1}} + \varepsilon'_n$$

die Grössen ε_n und ε'_n mit wachsenden Werthen von n unendlich klein. Die rechten Seiten der Gleichungen

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \left(x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) - \varepsilon_n$$

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}} = \left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{q_n}{q_{n-1}}\right) - \varepsilon'_n$$

sind daher, wenn n eine bestimmte Grenze überschreitet, dem absoluten Betrage nach grösser als ρ'', wo ρ'' eine um beliebig wenig kleiner als ρ' angenommene Grösse bedeutet.

Durch Auflösung der Gleichung (11) findet man aber

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{\pm\sqrt{D}}{A'}, \qquad \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{\mp\sqrt{D}}{C'},$$

und also ist, von einem bestimmten Werthe von n ab,

$$|A'| < \frac{|\sqrt{D}|}{\rho''}, \qquad |C'| < \frac{|\sqrt{D}|}{\rho''}.$$

Folglich können A', C' und $B' = \sqrt{D + 4A'C'}$, sowie

$$x_{n+1} = \frac{-B' \pm \sqrt{D}}{2A'}.$$

[1] Für den Fall der Entwicklung reeller Grössen in Kettenbrüche, deren Theilnenner gewöhnliche reelle positive ganze Zahlen sind, hat Herr Hermite diese Gleichung zum Beweise der periodischen Entwicklung quadratischer Irrationalitäten verwendet. (Bulletin des sciences mathématiques, 2me série, t. 9, pag. 11.)

von diesem Werthe von n ab, nur noch eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen. Es sind also in der That, wie behauptet wurde, in der Reihe

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

nur eine endliche Anzahl verschiedener Grössen vorhanden.

Indem ich mich nunmehr den Anwendungen der entwickelten Sätze auf besondere Zahlensysteme (S) zuwende, bemerke ich vorab noch Folgendes: Die Voraussetzungen (V) sind sicher erfüllt, wenn der absolute Betrag von $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ beständig grösser als 1 und der absolute Betrag von $\frac{1}{x_n}$ beständig kleiner als k ist, wo k eine positive Zahl kleiner als 1 bezeichnet. In der That wächst dann der absolute Betrag von q_n, der Ungleichung $|q_n| > |q_{n-1}|$ zufolge, mit n über alle Grenzen, und es ist wegen (8),

$$\left|\frac{1}{\theta_{n-1}}\right| \geqq \left|\frac{q_n}{q_{n-1}}\right| - \left|\frac{1}{x_{n+1}}\right| > 1 - k,$$

also der absolute Betrag von θ_n beständig kleiner als $\frac{1}{1-k}$.

I.

(S) ist das System der complexen ganzen Zahlen m + ni.

Es sei $x = u + iv$ eine beliebige complexe Grösse. Ich setze

$$x = a + (u' + iv'),$$

wo die complexe ganze Zahl a so bestimmt werden soll, dass

$$-\frac{1}{2} \leqq u' < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} \leqq v' < \frac{1}{2}$$

wird. Auf diese Weise wird jeder complexen Grösse x eine bestimmte complexe ganze Zahl a zugeordnet. Bildet man nun, von irgend einer Grösse x_0 ausgehend, die Gleichungskette

$$(16) \quad x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad \ldots, \quad x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \ldots$$

wobei allgemein a_n diejenige complexe ganze Zahl bezeichnet, welche der Grösse x_n zugeordnet ist, so ist zunächst

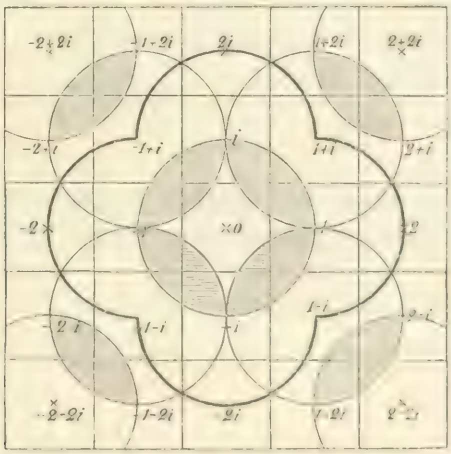
$$(17) \qquad \left|\frac{1}{x_n}\right| \leqq \sqrt{\frac{1}{2}}. \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

Der Beweis der Ungleichung $|q_n| > |q_{n-1}|$ ist nicht ganz einfach; er erfordert eine genauere Untersuchung der Zahlenreihe $a_1, a_2, \ldots.$ Behufs dieser Untersuchung zerlege ich die Zahlenebene durch die Geraden

$$u = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots; \qquad v = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$$

in unendlich viele Quadrate. Dann wird jeder Grösse $u + iv$ diejenige complexe ganze Zahl zugeordnet sein, welche den Mittelpunkt des die

Fig. 1.



Grösse $u + iv$ enthaltenden Quadrates bildet, wobei von den Rändern des einzelnen Quadrates nur diejenigen zu dem Quadrate rechnen, welche man vom Mittelpunkte aus nach der Richtung der abnehmenden u, bez. v erblickt. Da $x_0 - a_0$ in dem Quadrate mit dem Mittelpunkte 0 liegt, so wird $x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}$ dem Raume R angehören, welcher ausserhalb der Kreise $(1), (i), (-1), (-i)$ liegt.[1] Hier habe ich, wie in der Folge stets, mit (a) denjenigen Kreis bezeichnet, welcher den Radius 1 und den

[1] Die Begrenzung von R ist in Figur 1. scharf gezeichnet.

Punkt a zum Mittelpunkt hat. Wie x_1 werden auch $x_2, x_3, \ldots$ in den Raum R fallen, und daher können die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ keinen der Werthe $0, +1, +i, -1, -i$, annehmen. Aber die Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ unterliegt ferner noch gewissen Beschränkungen, welche sich auf die Aufeinanderfolge der Zahlen beziehen. Sei beispielsweise

$$a_n = 2 + i.$$

Dann muss x_n sowohl dem Raume R als auch dem Quadrate mit dem Mittelpunkte $2 + i$ angehören. Folglich kann $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$ nicht in denjenigen Raum eintreten, welcher aus R von dem Kreise $(-1 + i)$ ausgeschnitten wird. Daher ist die Folge $a_n = 2 + i$, $a_{n+1} = -1 + i$ unmöglich. Man erkennt sofort, dass solche Beschränkungen in der Aufeinanderfolge der Zahlen a immer und nur dann bei der Zahl a_n beginnen werden, wenn das Quadrat mit dem Mittelpunkte a_n von der Begrenzung des Raumes R durchschnitten wird. Für den vorliegenden Zweck genügt es von den Zahlfolgen $a_n, a_{n+1}, \ldots$ die folgenden als unmöglich zu constatiren, was an der Hand von Fig. 1. ohne Schwierigkeit geschieht.

Tabelle unmöglicher Zahlfolgen.

	a_n	a_{n+1}	a_{n+2}	a_{n+3}
I.	$-2, 2i, -1+i, -2+i, -1+2i$	$1+i$		
II.	$2, 2i, 1+i$	$-2+2i$		
III.	$2+i, 1+2i$	$-2+2i$	$1+i$	
IV.	$-2, 2i, -1+i$	$2+2i$		
V.	$-2+i, -1+2i$	$2+2i$	$-2+2i$	$1+i$

Wenn ferner $a_n = 2 + i$ oder $1 + 2i$ ist, und die folgenden Zahlen $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+2k-1}$ haben abwechselnd die Werthe $-2 + 2i$ und $2 + 2i$, so kann a_{n+2k} nicht gleich $1 + i$ sein; ebenso wenn $a_n = -2 + i$ oder $-1 + 2i$ ist und die folgenden Zahlen $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+2k}$ haben abwechselnd die Werthe $2 + 2i$ und $-2 + 2i$, so kann a_{n+2k+1} nicht gleich $1 + i$ sein. Die einfachsten Fälle hierfür sind in der Tabelle unter III. und V. aufgenommen.

Dies vorausgeschickt gehe ich nun zum Beweise der Ungleichung $|q_n| > |q_{n-1}|$ über. Ich setze

$$(18) \qquad k_n = \frac{q_n}{q_{n-1}};$$

dann ist, der Gleichung $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ zufolge:

$$(19) \qquad k_1 = a_1, \qquad k_2 = a_2 + \frac{1}{k_1}, \quad \ldots, \quad k_n = a_n + \frac{1}{k_{n-1}}, \quad \ldots.$$

und es ist zu beweisen, dass beständig

$$(20) \qquad |k_n| > 1$$

ist, oder dass der Punkt k_n beständig ausserhalb des Kreises (0) liegt. Dies trifft nun für k_1 offenbar zu; ich will annehmen, dass $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ der Ungleichung (20) genügen, dagegen k_n nicht mehr und werde zeigen, dass diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Da $k_n = a_n + \frac{1}{k_{n-1}}$ im Innern des Kreises (a_n) liegt, so muss a_n einen der Werthe $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$, $-1 - i$ besitzen; denn in allen anderen Fällen würde k_n ausserhalb des Kreises (0) fallen, also der absolute Betrag von k_n grösser als 1 sein. Ich betrachte nun nur den Fall $a_n = 1 + i$, da die drei übrigen Fälle eine ganz analoge Behandlung gestatten.

Da $k_n = a_n + \frac{1}{k_{n-1}}$ im Innern der beiden Kreise $(0)'$ und $(1 + i)$ liegt (den Rand des ersteren Kreises eingeschlossen, was durch das an (0) gesetzte Komma angedeutet werde) so fällt $\frac{1}{k_{n-1}}$ in das Innere der Kreise (0) und $(-1-i)'$;[1] folglich $k_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{k_{n-2}}$ in das Äussere des Kreises (0) und in das Innere von $(-1 + i)'$. Daher kann a_{n-1} nur einen der Werthe -2, $-2 + i$, $-1 + 2i$, $2i$, $-1 + i$, $-2 + 2i$ besitzen; denn in allen übrigen Fällen wird der Kreis (a_{n-1}), welcher $a_{n-1} + \frac{1}{k_{n-2}}$ in sich aufnimmt, nicht in das Innere des Kreises $(-1 + i)'$ eintreten. Von jenen Werthen ist aber, der aufgestellten Tabelle zufolge, nur der letzte zulässig. Es muss also $a_{n-1} = -2 + 2i$ sein. Da nun $a_{n-1} + \frac{1}{k_{n-2}}$

[1] Die betreffenden Gebiete sind in der Figur 1. schraffirt.

im Innern der beiden Kreise $(-2+2i)$ und $(-1+i)'$[1] liegt, so folgt weiter, dass $k_{n-2} = a_{n-2} + \frac{1}{k_{n-3}}$ ausserhalb des Kreises (0) und im Innern des Kreises $(1+i)'$ liegt, und hieraus, wieder mit Rücksicht auf die Tabelle, $a_{n-2} = 2+2i$. So fortfahrend erkennt man, dass die Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots$ die Werthe haben müssen:

$$a_n = 1+i, \qquad a_{n-1} = -2+2i, \qquad a_{n-2} = 2+2i,$$

$$a_{n-3} = -2+2i, \qquad a_{n-4} = 2+2i, \quad \ldots .$$

Bildet man aber mit diesen Zahlen die Grössen $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n-1}$, so zeigt sich, dass sie sämmtlich in den unendlichen, von den Kreisen $(1+i), (1-i), (-1+i), (-1-i)$ begrenzten Raum fallen. Daher wird $|k_n| > 1$ sein, was der Annahme widerstreitet. In ganz entsprechender Weise ergiebt sich ein Widerspruch, wenn man voraussetzt a_n habe einen der Werthe $1-i, -1+i, -1-i$.

Hiermit ist ausser Zweifel gesetzt, dass $|k_n|$ beständig grösser als 1, also stets

$$|q_n| > |q_{n-1}|$$

ist. Auf Grund der vorausgeschickten allgemeinen Entwicklungen kann man nunmehr offenbar den folgenden Satz aussprechen:

Man entwickle eine beliebige complexe Grösse x_0 in einen Kettenbruch, indem man

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad \ldots$$

setzt, wo die ganze complexe Zahl a_n immer so bestimmt ist, dass sowohl der reelle Bestandtheil, wie auch der Factor von i in der Differenz $x_n - a_n$ zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt. Dann wird dieser Kettenbruch 1° stets gegen den Werth x_0 convergiren, 2° immer und nur dann abbrechen, wenn x_0 eine complexe rationale Zahl ist, und 3° stets periodisch werden, wenn x_0 einer Gleichung zweiten Grades mit ganzzahligen complexen Coefficienten genügt, ohne Wurzel einer eben solchen Gleichung ersten Grades zu sein.

[1] Das betreffende Gebiet ist in der Figur 1. schraffirt.

Ich brauche kaum besonders hervorzuheben, dass auf diesen Satz die Theorie der quadratischen Formen im Gebiete der complexen ganzen Zahlen gegründet werden kann, dass insbesondere aus ihm ohne Weiteres die Lösung der PELL'schen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

folgt, unter D eine gegebene nichtquadratische, unter t und u zu bestimmende complexe ganze Zahlen verstanden.[1]

Ausser der hier betrachteten giebt es übrigens noch andere Kettenbruchentwicklungen im Gebiete der complexen ganzen Zahlen $m + ni$, für welche der obige Satz ebenfalls gilt, worauf ich indessen an dieser Stelle nicht eingehen will.

II.

(S) ist das System der complexen ganzen Zahlen $m + n\rho$

$$\left(\rho = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right).$$ [2]

Ich verbinde den Punkt 0 mit den umliegenden Punkten $1, 1 + \rho, \rho, -1, -1 - \rho, -\rho$ und errichte in den Mitten der Verbindungslinien die Lothe. Diese bilden ein reguläres Sechseck mit dem Mittelpunkte 0. (Vgl. Fig. 2.) Von den Randpunkten rechne ich nur die links von der Axe der rein imaginären Zahlen liegenden zu dem Sechseck. Wird in entsprechender Weise um jeden Punkt $m + n\rho$ ein solches Sechseck construirt, so überdeckt die Gesammtheit der letzteren die complexe Zahlenebene einfach und lückenlos. Einer beliebigen complexen Grösse x ordne ich nun diejenige ganze Zahl $m + n\rho$ zu, welche den

[1] Vgl. die Andeutung in DIRICHLET's Abhandlung: *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes.* CRELLE's Journal, Bd. 24, pag. 336

[2] Der Euclidische Algorithmus, für die Zahlen $m + n\rho$, welchen Herr BACHMANN in seinem Buche: *die Lehre von der Kreistheilung* pag. 189 benutzt, ergiebt eine andere Kettenbruchentwicklung wie die, welche ich im Texte definire. Die erstere Entwicklung legt eine Eintheilung der Ebene in Rechtecke zu Grunde, deren Mittelpunkte die ganzen Zahlen $m + n\rho$ sind, deren Seiten den Axen der reellen bez. rein imaginären Zahlen parallel laufen und bez. die Längen 1 und $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ besitzen.

Mittelpunkt des die Grösse x aufnehmenden Sechsecks bildet. Um eine beliebige Grösse x_0 in einen Kettenbruch zu entwickeln setze ich

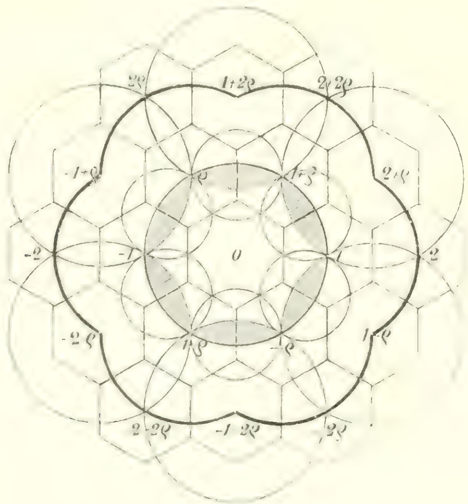
$$(21) \qquad x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad \ldots,$$

wobei allgemein a_n die der Grösse x_n zugeordnete Zahl bezeichnet. Da $\frac{1}{x_n}$ in das um den Nullpunkt abgegrenzte Sechseck fällt, so gilt die Ungleichung

$$(22) \qquad \left|\frac{1}{x_n}\right| \leq \sqrt{\frac{1}{3}}. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Um zu beweisen, dass der absolute Betrag von $k_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$ stets grösser ist als 1, bemerke ich zunächst, dass $x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}}$ in den ausserhalb der Kreise (1), $(1 + \rho)$, (ρ), (-1), $(-1-\rho)$, $(-\rho)$ liegenden Raum R fällt.[1] Hieraus folgt, dass die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ keinen der Werthe

Fig. 2.



$0, 1, 1 + \rho, \rho, -1, -1-\rho, -\rho$ annehmen können. Die Begrenzung des Raumes R durchsetzt, wie aus der Figur 2. ersichtlich ist, zwölf

[1] Die Begrenzung von R ist in Fig. 2. scharf gezeichnet.

Sechsecke. Daher giebt es wieder bestimmte Reihenfolgen der Zahlen a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ..., welche in der Gleichungskette (21) nicht vorkommen können. Für den vorliegenden Zweck genügt es zu bemerken, dass die Zahl a_{n+1} nicht den Werth $2+\rho$ erhalten kann, wenn a_n einen der Werthe -2, $\rho-1$, 2ρ besitzt. Angenommen nun in der Reihe der Grössen

$$(23)\qquad k_1 = a_1 + \frac{1}{k_0}, \qquad k_2 = a_2 + \frac{1}{k_1}, \quad \ldots, \quad k_n = a_n + \frac{1}{k_{n-1}}, \quad \ldots$$

(wo $k_0 = \infty$, $k_1 = a_1$) sei k_n die erste deren absoluter Betrag nicht grösser ist als 1. Da $a_n + \frac{1}{k_{n-1}}$ im Innern des Kreises (a_n) liegt, so kann a_n nur einen der Werthe

$$2+\rho,\ 1+2\rho,\ \rho-1,\ -2-\rho,\ -1-2\rho,\ -\rho+1$$

haben. Ich knüpfe die weitere Betrachtung an die Annahme

$$a_n = 2+\rho,$$

da die übrigen fünf Fälle auf ganz entsprechende Art erledigt werden können. Ist $a_n = 2+\rho$, so liegt k_n im Innern der Kreise $(0)'$ und $(2+\rho)$, wobei wieder das Komma bedeutet, dass der Rand des betreffenden Kreises mitzurechnen ist. Daher liegt $\frac{1}{k_{n-1}} = k_n - a_n$ im Innern der Kreise (0) und $(-2-\rho)'$, folglich k_{n-1} ausserhalb des Kreises (0) und im Innern oder auf dem Rande desjenigen Kreises, welcher über der Strecke $-1 \ldots \rho$ als Durchmesser beschrieben ist. Da nun

$$k_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{k_{n-2}}$$

im Innern von (a_{n-1}) liegt, so muss a_{n-1} einen der Werthe -2, $\rho-1$, 2ρ besitzen. Dies ist aber unmöglich, da dann die auf a_{n-1} folgende Zahl a_n nicht gleich $2+\rho$ sein könnte. Da somit die Annahme $|k_n| = \left|\frac{q_n}{q_{n-1}}\right|$ sei $\leqq 1$ auf einen Widerspruch führt, so gilt die Ungleichung

$$(24)\qquad |q_n| > |q_{n-1}|$$

für jeden Werth von n. Aus (22) und (24) folgen nun mit Hülfe der

oben bewiesenen allgemeinen Sätze wieder die fundamentalen Eigenschaften der hier betrachteten Kettenbruchentwicklung:

Die Entwicklung einer complexen Grösse ergiebt stets einen convergenten Kettenbruch, welcher dann und nur dann abbricht, wenn die entwickelte Grösse der Quotient zweier ganzen Zahlen $m + n\rho$ ist, und welcher periodisch wird, wenn die entwickelte Grösse einer irreductibeln quadratischen Gleichung genügt, deren Coefficienten complexe ganze Zahlen der Form $m + n\rho$ sind.

Dieser Satz kann wiederum als Fundament dienen für die Theorie der quadratischen Formen im Gebiete der complexen ganzen Zahlen, welche aus dritten Einheitswurzeln zusammengesetzt sind.

Königsberg i/Pr. den 29. November 1887.

SUR LES GROUPES TRANSITIFS

DONT LE DEGRÉ EST LE CARRÉ D'UN NOMBRE PREMIER

PAR

L. SYLOW
à FREDERIKSHALD.

Si l'ordre d'un groupe est divisible par une puissance d'un nombre premier, telle que p^m, mais non divisible par p^{m+1}, cet ordre est, comme on le sait, de la forme $p^m\pi(np + 1)$; le groupe en contient un autre de l'ordre $p^m\pi$; celui-ci contient à son tour un troisième groupe, de l'ordre p^m, auquel toutes ses substitutions sont permutables; enfin le nombre des groupes de l'ordre p^m contenus dans le premier groupe est $np + 1$. La détermination complète de ce dernier nombre, dans les divers cas qui peuvent se présenter, serait évidemment d'une grande importance pour la théorie des substitutions; malheureusement elle paraît être d'une extrême difficulté. Mais il sera possible de trouver des résultats plus ou moins intéressants sur la forme du nombre n par rapport aux modules $p, p^2, p^3, \ldots$; à cet effet on n'aura qu'à poursuivre le raisonnement qui m'a servi pour la démonstration du théorème cité (Mathematische Annalen, t. 5). Pour faire un premier pas dans cette direction, je me propose, dans le travail présent, de considérer le cas le plus simple, celui des groupes transitifs du degré p^2.

Je désignerai par G un groupe transitif du degré p^2, par O son ordre, que je supposerai divisible par $p^{\alpha+2}$, mais non divisible par $p^{\alpha+3}$; le nombre α pourra donc avoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Je désignerai de plus par I un groupe de l'ordre $p^{\alpha+2}$ contenu dans G, et par H le plus grand groupe contenu dans G dont les substitutions soient

permutables à I. L'ordre du groupe H sera dénoté par $p^{\alpha+2}.\pi$, où par conséquent π est premier à p; on aura donc

$$O = p^{\alpha+2}\pi(np + 1).$$

Je déterminerai dans un premier paragraphe la forme de I, dans un deuxième celle de H; dans les deux paragraphes suivants je m'occuperai du nombre n; enfin dans le dernier je ferai des résultats trouvés quelques applications, qui se présentent au premier coup d'oeil.

§ 1. *Détermination du groupe I.*

1. D'après le lemme de Cauchy le groupe symétrique du degré p^2 contient un certain nombre de groupes de l'ordre p^{p+1}, tous isomorphes entre eux. Notre groupe I est contenu dans un de ces groupes de Cauchy, et en disposant convenablement des indices, nous pouvons choisir ce dernier comme nous voudrons. En désignant les éléments par le symbole

$$u_{x,y},$$

les indices x et y étant pris suivant le module p, nous pouvons donc supposer que les substitutions de I soient contenues dans l'expression

$$\begin{vmatrix} x & x + a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_{p-1} y^{p-1} \\ y & y + b \end{vmatrix},$$

qui d'ailleurs peut être remplacée par cette autre

$$\begin{vmatrix} x & x + a_0 + a_1 y + a_2 (y)_2 + a_3 (y)_3 + \ldots + a_{p-1} (y)_{p-1} \\ y & y + b \end{vmatrix},$$

où, pour abréger, on a fait

$$(y)_i = \frac{y(y-1)(y-2)\ldots(y-i+1)}{1.2.3\ldots i}.$$

En posant

$$U = \begin{vmatrix} x & x + a_0 + a_1 y + a_2 (y)_2 + \ldots + a_{p-1} (y)_{p-1} \\ y & y + 1 \end{vmatrix},$$

on trouve

$$U^m = \left| \begin{matrix} x & x + ma_0 + a_1\{(y+m)_2 - (y)_2\} + \dots + a_{p-2}\{(y+m)_{p-1} - (y)_{p-1}\} + a_{p-1} \sum_0^{m-1}{}_r (y+r)_{p-1} \\ y & y+m \end{matrix} \right|.$$

Si l'on fait $m = p$, on a, pour $i \leqq p - 1$,

$$(y + m)_i - y_i \equiv 0 \pmod p,$$

et

$$\sum_0^{m-1}{}_r (y + r)_{p-1} = 1,$$

donc

$$U^p = \left| \begin{matrix} x & x + a_{p-1} \\ y & y \end{matrix} \right|.$$

Ainsi l'ordre de la substitution U est égal à p ou à p^2 suivant que a_{p-1} est congru à zéro, ou non.

Parmi ces substitutions toutes celles qui ne changent pas l'indice y, sont échangeables entre elles. En faisant

$$S = \left| \begin{matrix} x & x + f(y) \\ y & y \end{matrix} \right|, \qquad T = \left| \begin{matrix} x & x + \varphi(y) \\ y & y + 1 \end{matrix} \right|,$$

on trouve

$$(1) \qquad T^{-1}ST = \left| \begin{matrix} x & x + f(y - 1) \\ y & y \end{matrix} \right|, \qquad TST^{-1} = \left| \begin{matrix} x & x + f(y + 1) \\ y & y \end{matrix} \right|.$$

d'où

$$(2) \qquad S^{-1}T^{-1}ST = T^{-1}STS^{-1} = \left| \begin{matrix} x & x - \{f(y) - f(y - 1)\} \\ y & y \end{matrix} \right|.$$

$$(3) \qquad S^{-1}TST^{-1} = TST^{-1}S^{-1} = \left| \begin{matrix} x & x + f(y + 1) - f(y) \\ y & y \end{matrix} \right|,$$

$$(4) \qquad S^{-1}TS = \left| \begin{matrix} x & x + f(y + 1) - f(y) + \varphi(y) \\ y & y + 1 \end{matrix} \right|,$$

2. Le groupe G étant transitif, I le sera également (voir le Mémoire cité plus haut, n° 4); donc I contient des substitutions de chacune des formes S et T du numéro précédent. Or, si β désigne le plus grand degré des fonctions $f(y)$, les formules (2) et (3) font voir que le groupe I contient aussi des substitutions dans lesquelles les fonctions $f(y)$ sont des degrés $\beta - 1$, $\beta - 2$, ..., 1, 0. On en peut conclure qu'on a $\beta = \alpha$, et qu'en faisant

$$\theta_i = |x, y \quad x + y^i, y|,$$

toutes les substitutions de I sont contenues dans l'expression

$$\theta_0^{a_0} \theta_1^{a_1} \ldots \theta_\alpha^{a_\alpha} . T^b;$$

d'ailleurs les substitutions θ_i peuvent être remplacées par les suivantes

$$\vartheta_i = |x, y \quad x + (y)_i, y|.$$

Si l'on désigne, pour un moment, par g_i le groupe dérivé des substitutions $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_i$, et par I_i celui qui dérive des substitutions de g_i et de T, on voit (équat. (2) et (3)) que les substitutions de I_i sont échangeables entre elles à des substitutions de g_{i-1} près. Donc si l'on a $\alpha = 0$, toutes les substitutions de I_α sont échangeables entre elles; si $\alpha > 0$, les $\theta_0^{a_0}$ sont les seules substitutions de I_α qui soient échangeables à toutes les autres.

Transformons maintenant le groupe I par la substitution

$$U = |x, y \quad x + \psi(y), y|.$$

Les substitutions θ_i, ϑ_i conservent leurs formes, au contraire on a

$$U^{-1} T U = |x, y \quad x + \varphi(y) + \psi(y + 1) - \psi(y), y + 1|.$$

Or, si en développant suivant les fonctions $(y)_i$, on a

$$\varphi(y) = a_0 + a_1 y + a_2 (y)_2 + \ldots + a_{p-2} (y)_{p-2} + a_{p-1} (y)_{p-1},$$

on peut faire

$$\psi(y + 1) - \psi(y) = -[a_0 + a_1 y + a_2 (y)_2 + \ldots + a_{p-2} (y)_{p-2}],$$

ce qui donne

$$U^{-1}TU = |\, x, y \quad x + a_{p-1}(y)_{p-1}, y + 1 \,| = T'.$$

Si maintenant a_{p-1} est différent de zéro, transformons de nouveau par la substitution

$$V = |\, x, y \quad bx, y \,|,$$

qui évidemment est permutable au groupe g_α; on trouve

$$V^{-1}T'V = |\, x, y \quad x + a_{p-1}b(y)_{p-1}, y + 1 \,| = T'';$$

donc en faisant $a_{p-1}b \equiv 1 \pmod p$, on a

$$T'' = |\, x, y \quad x + (y)_{p-1}, y + 1 \,|.$$

Par un choix convenable des indices, la substitution T peut donc être réduite à l'une des deux formes suivantes

$$t = |\, x, y \quad x, y + 1 \,|, \qquad t = |\, x, y \quad x + (y)_{p-1}, y + 1 \,|.$$

On voit que, pour $\alpha < p - 1$, on a deux espèces de groupes de l'ordre $p^{\alpha+2}$, qui diffèrent seulement par la forme de la substitution t; dans la première espèce toutes les substitutions sont de l'ordre p; dans la seconde, celles qui ne font pas varier l'indice y sont de l'ordre p, les autres de l'ordre p^2. Quand $\alpha = p - 1$, les deux cas ne donnent qu'un seul groupe, puisque le groupe g_{p-1} contient la substitution

$$\vartheta_{p-1} = |\, x, y \quad x + (y)_{p-1}, y \,|.$$

Tous les groupes d'ordre p^2 contenus dans G étant isomorphes, cette classification peut aussi être appliquée aux groupes du degré p^2 en général: nous comprendrons dans la première espèce les cas où $\alpha = p - 1$.

Des équations (1) on déduit les suivantes:

$$(5) \qquad t^{-1}\vartheta_i t = \vartheta_0^{\pm 1}\vartheta_1^{\mp 1} \ldots \vartheta_{i-1}^{-1}\vartheta_i, \qquad t\vartheta_i t^{-1} = \vartheta_{i-1}\vartheta_i.$$

$$(6) \qquad t^{-1}\theta_i t = \theta_0^{\pm 1}\theta_1^{\mp i}\theta_2^{\pm (i)_2} \ldots \theta_{i-1}^{-i}\theta_i, \qquad t\theta_i t^{-1} = \theta_0\theta_1^{i}\theta_2^{(i)_2} \ldots \theta_{i-1}^{i}\theta_i.$$

En considérant les groupes de la seconde espèce, il est quelquefois

commode d'employer un seul indice, pris suivant le module p^2. A cet effet on peut faire

$$xp + y \equiv \xi \pmod{p^2},$$

en ayant soin de remplacer toujours y par le plus petit nombre positif qui lui est congru $(\bmod\, p)$; on trouve ainsi

$$t = \left| \xi \quad \xi + 1 \right|,$$

$$t^p = \theta_0 = \vartheta_0 = \left| \xi \quad \xi + p \right|,$$

$$\vartheta_i = \left| \xi \quad \xi + p(\xi)_i \right|, \qquad \theta_i = \left| \xi \quad \xi + p\xi^i \right|.$$

Evidemment le groupe I est non-primitif, les éléments qui répondent à une même valeur de y formant un système; de plus si $\alpha > 0$, les éléments ne peuvent être répartis en systèmes que de cette manière, comme on le voit aisément.

Un groupe d'ordre $p^{\alpha+2}$ contenu dans G est complètement déterminé, quand on connaît les substitutions qui sont échangeables à toutes les autres, et qu'on connaît de plus de quelle manière les systèmes sont permutés entre eux. Supposons, en effet, que le groupe I', contenu dans G, contienne la substitution $\theta_0^a = \left| x, y \quad x + a, y \right|$ échangeable à toutes les autres, et que celles-ci déplacent les systèmes conformément à la substitution $\left| y \quad y + b \right|$. Evidemment les substitutions de I' sont comprises dans l'expression

$$T = \left| x, y \quad x + \varphi(y), y + b \right|.$$

Or G, contenant T et t, contient $T.t^{-b}$, substitution qui peut être écrite sous la forme suivante

$$Tt^{-b} = \left| x, y \quad x + F(y), y \right| = S.$$

Si maintenant S n'était pas contenu dans I, le groupe qui dérive de S et des substitutions de I serait d'un ordre $p^{\alpha+m}$, où $m > 2$; donc S, et par suite T, font partie de I, c'est-à-dire que I' coïncide avec I. En particulier, si G appartient à la seconde espèce, I' est complètement déterminé par une substitution quelconque de l'ordre p^2.

§ 2. *Détermination du groupe H.*

3. Considérons d'abord les groupes de la première espèce, en excluant préalablement les cas où $\alpha = 0$. Les θ_0^m étant les seules substitutions de I échangeables à toutes les autres, une substitution S de H doit transformer θ_0 en θ_0^a; par suite on doit avoir

$$S = |x, y \quad ax + \varphi(y), \varphi_1(y)|,$$

φ et φ_1 dénotant des fonctions entières du degré $p - 1$ au plus. La transformée de t par S doit être une substitution de I, ce qui donne les conditions suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(y+1) - \varphi(y) \equiv b_0 + b_1\varphi_1(y) + b_2[\varphi_1(y)]^2 + \ldots + b_\alpha[\varphi_1(y)]^\alpha \\ \varphi_1(y+1) - \varphi_1(y) \equiv c \end{array}\right| \pmod{p}.$$

La seconde congruence donne

$$\varphi_1(y) \equiv cy + d;$$

en remettant cette valeur dans la première et développant suivant les fonctions $(y)_i$, on a un résultat de la forme suivante

$$\varphi(y+1) - \varphi(y) \equiv b_0' + b_1'y + b_2'(y)_2 + \ldots + b_\alpha'(y)_\alpha,$$

d'où

$$\varphi(y) \equiv \varphi(0) + b_0'y + b_1'(y)_2 + b_2'(y)_3 + \ldots + b_\alpha'(y)_{\alpha+1}.$$

Donc toute substitution de H est comprise dans l'expression

$$\left|\begin{array}{ll} x & ax + b_0 + b_1y + b_2y^2 + \ldots + b_{\alpha+1}y^{\alpha+1} \\ y & cy + d \end{array}\right|;$$

par conséquent elle est le produit d'une substitution de I par une autre de la forme suivante:

$$T = |x, y \quad ax + by^{\alpha+1}, cy|.$$

Evidemment les substitutions T forment un groupe, que nous désignerons par H'.

Quand $\alpha = p - 1$, on a $b = 0$; nous démontrerons maintenant que, sans nuire à la généralité, on peut supposer $b = 0$, même si $\alpha < p - 1$. En supposant $c^{\alpha+1} \equiv a \pmod p$ on trouve

$$T^m = \begin{vmatrix} x & c^{m(\alpha+1)}x + mbc^{(m-1)(\alpha+1)}y^{\alpha+1} \\ y & c^m y \end{vmatrix};$$

et en faisant m égal au plus petit exposant pour lequel $c^m \equiv 1 \pmod p$:

$$T^m = \left| x\,,\, y \quad x + m\frac{b}{a}y^{\alpha+1}\,,\, y \right|.$$

Or, si l'on n'avait pas $b \equiv 0$, la substitution T^m serait de l'ordre p, et par conséquent l'ordre de H serait divisible par $p^{\alpha+3}$; cela étant contre l'hypothèse, on conclut que si dans une substitution T de H' on a

$$a - c^{\alpha+1} \equiv 0,$$

on a en même temps

$$b \equiv 0.$$

Supposons maintenant que H' contienne les deux substitutions

$$T = \left| x\,,\, y \quad ax + by^{\alpha+1}\,,\, cy \right|, \qquad T_1 = \left| x\,,\, y \quad a_1x + b_1y^{\alpha+1}\,,\, c_1y \right|;$$

on trouve

$$T^{-1}T_1T.T_1^{-1} = \begin{vmatrix} x & x + \dfrac{ab_1 - a_1b + bc_1^{\alpha+1} - b_1c^{\alpha+1}}{a_1c^{\alpha+1}}y^{\alpha+1} \\ y & y \end{vmatrix}.$$

Cette substitution, qui est étrangère à I, doit être identique, car autrement son ordre serait p, ce qui est impossible; donc on a

$$(7) \qquad \frac{b_1}{a_1 - c_1^{\alpha+1}} \equiv \frac{b}{a - c^{\alpha+1}} \pmod p.$$

Cela posé, transformons le groupe H par la substitution

$$U = \left| x\,,\, y \quad x + ry^{\alpha+1}\,,\, y \right|,$$

qui est permutable à I; on trouve

$$U^{-1}TU = \left| x\,,\, y \quad ax + [b - r(a - c^{\alpha+1})]y^{\alpha+1}\,,\, cy \right|;$$

donc en faisant

$$r \equiv \frac{b}{a - c^{\alpha+1}},$$

on a

$$U^{-1}TU = | x, y \quad ax, cy |;$$

de plus la congruence (7) fait voir que les transformées de toutes les autres substitutions de H' prennent la même forme.

Il est donc démontré que, pour les groupes de la première espèce, α étant > 0, on peut supposer le groupe H' formé de substitutions de la forme

$$| x, y \quad ax, cy |;$$

l'ordre de H' est donc $\frac{(p-1)^2}{h}$, celui de H est $p^{\alpha+2}\frac{(p-1)^2}{h}$, le nombre h étant un diviseur de $(p-1)^2$.

4. Passons aux groupes de la seconde espèce. Quand $\alpha = 0$, le groupe I contient seulement les puissances de la substitution

$$t = | \xi \quad \xi + 1 | \pmod{p^2},$$

par suite toute substitution de H est le produit d'une substitution de I par une substitution de la forme $| \xi, a\xi |$, où a est premier à p, et appartient à un exposant qui est premier à p. Donc en désignant par δ une racine primitive du module p^2, les valeurs de a sont de la forme $\delta^{\nu p}$, par conséquent l'ordre de H est égal à

$$\frac{p^2(p-1)}{h},$$

h étant un diviseur de $p-1$.

En général toute substitution U de H doit vérifier l'équation

$$tU = US,$$

S étant une substitution de I. En faisant

$$U = | \xi \quad \varphi(\xi) |,$$

on a ainsi la condition suivante:

$$\varphi(\xi+1) - \varphi(\xi) \equiv m_0 + p\{m_1\varphi(\xi) + m_2(\varphi\xi)^2 + \ldots + m_\alpha(\varphi\xi)^\alpha\} \pmod{p^2}.$$

On en tire

$$\varphi(\xi + 1) - \varphi(\xi) \equiv m_0 \pmod p,$$

d'où

$$\varphi(\xi) \equiv m_0\xi + \varphi(0) \pmod p.$$

En remettant ce résultat dans la congruence primitive, elle prend la forme

$$\varphi(\xi + 1) - \varphi(\xi) \equiv n_0 + p\{n_1\xi + n_2\xi^2 + \ldots + n_\alpha\xi^\alpha\} \pmod{p^2}.$$

Comme nous avons supposé $\alpha < p - 1$, on en tire

$$\varphi(\xi) \equiv a\xi + b + p(a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \ldots + a_{\alpha+1}\xi^{\alpha+1}) \pmod{p^2}.$$

Donc toute substitution de H est le produit d'une substitution de I par une substitution de la forme suivante

$$T = |\,\xi \quad a\xi + pb\xi^{\alpha+1}\,|.$$

Ces substitutions forment un groupe H'. En supposant

$$a^\alpha \equiv 1 \pmod p,$$

on a

$$T^m = |\,\xi \quad a^m\xi + pbma^{m-1}\xi^{\alpha+1}\,|;$$

si l'on fait m égal au plus petit exposant pour lequel $a^m = 1 + ph$, il vient

$$T^m = |\,\xi \quad \xi + p(h\xi + bma^{m-1}\xi^{\alpha+1})\,|;$$

on en conclut que $b \equiv 0$, car autrement T^m serait de l'ordre p sans être contenu dans I. Ainsi la congruence

$$a^\alpha \equiv 1 \pmod p$$

entraine celle-ci

$$b \equiv 0 \pmod p.$$

Or je dis que le groupe H ne peut contenir qu'une seule substitution pour chaque valeur de a. En effet, s'il contient

$$T = |\,\xi \quad a\xi + pb\xi^{\alpha+1}\,| \quad \text{et} \quad T_1 = |\,\xi \quad a\xi + pb_1\xi^{\alpha+1}\,|,$$

il contient aussi

$$T^{-1}T_1 = \left|\, \xi \quad \xi + p\,\frac{b_1 - b}{a^{\alpha+1}}\,\xi^{\alpha+1} \,\right|,$$

qui, étant de l'ordre p, doit être contenu dans I; donc on a $b_1 \equiv b \pmod p$, $T = T_1$.

Par conséquent les valeurs du nombre a sont les puissances d'une certaine valeur primitive; donc les substitutions de H' sont les puissances de l'une d'elles, T_0; soit

$$T_0 = |\, \xi \quad a_0\xi + pb_0\xi^{\alpha+1} \,|.$$

En transformant H par la substitution

$$U = |\, \xi \quad \xi + pr\xi^{\alpha+1} \,|,$$

I n'est pas changé, et l'on a

$$U^{-1}T_0U = |\, \xi \quad a_0\xi + p[b_0 - r(a_0 - a_0^{\alpha+1})]\xi^{\alpha+1} \,|.$$

Or, si b_0 n'est pas congru à zéro $(\mathrm{mod}\, p)$, $a_0 - a_0^{\alpha+1}$ ne l'est pas non plus; nous pouvons donc faire

$$r \equiv \frac{b_0}{a_0 - a_0^{\alpha+1}} \pmod p,$$

ce qui donne

$$U^{-1}T_0U = |\, \xi \quad a_0\xi \,|.$$

On peut donc supposer que les substitutions de H' soient de la forme $|\, \xi \quad a\xi \,|$; d'autre part toutes les substitutions de cette forme contenues dans G appartiennent à H'. Si $a > p$, faisons $a = a' + a''p$, où $a' < p$; on a

$$|\, \xi \quad a\xi \,| = |\, \xi \quad a'\xi \,| \cdot \left|\, \xi \quad \xi + p\frac{a''}{a'}\xi \,\right|,$$

et comme le dernier facteur appartient à I, on peut remplacer a par a'. Donc l'ordre de H' est $\frac{p-1}{h}$, celui de H est $\frac{p^{\alpha+2}(p-1)}{h}$, h étant un diviseur de $p-1$.

Il est facile d'exprimer les substitutions de H par deux indices pris suivant le module p. En effet, ayant

$$T = |\xi \quad a\xi| \pmod{p^2},$$

et faisant

$$\xi = px + y, \qquad y < p,$$

$$ay \equiv \eta \pmod{p}, \qquad \eta \geq 0, \qquad \eta < p,$$

et désignant enfin par $E(m)$ le plus grand nombre entier contenu dans la fraction m, on a

$$a\xi = apx + ay = apx + pE\left(\frac{ay}{p}\right) + \eta;$$

donc

$$T = \begin{vmatrix} x & ax + E\left(\frac{ay}{p}\right) \\ y & \eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & ax + E\left(\frac{ay}{p}\right) \\ y & ay \end{vmatrix} \pmod{p}.$$

5. Il nous reste à considérer le cas où le groupe I ne contient que les p^2 substitutions

$$|x, y \quad x + a, y + b|.$$

Le groupe H dérive évidemment des substitutions de I et de celles d'un certain groupe H' d'ordre π, dont les substitutions sont de la forme

$$|x, y \quad \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y|.$$

Inversement H renferme toutes les substitutions linéaires de G. Il faut donc trouver tous les groupes contenus dans le groupe linéaire homogène à deux indices dont les ordres sont premiers à p. La résolution de ce problème, beaucoup plus compliqué que celui que nous avons traité, peut être tirée de la détermination des groupes finis, contenus dans le groupe linéaire infini à deux variables, faite par M. Jordan dans son *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* (Journal für Mathematik, Bd. 84).[1] En effet, l'analyse de

[1] Ainsi M. Gierster s'en est servi dans son énumeration des groupes partiels contenus dans le groupe linéaire fractionnaire à un indice (Inauguraldissertation, Leipzig 1881).

M. Jordan repose entièrement sur la circonstance qu'un groupe fini ne peut contenir aucune substitution de la forme

$$|x, y \quad \alpha(x+\lambda y), \alpha y|,$$

λ étant différent de zéro, son ordre ne pouvant être fini; pareillement. dans notre problème, l'ordre d'une substitution de cette forme est toujours un multiple de p; elle ne peut donc appartenir à H'. En lisant la déduction de M. Jordan, on voit aisément qu'on obtient toutes les formes du groupe H', en remplaçant les variables x et y par des indices pris suivant le module p, et changeant les équations de condition auxquelles doivent satisfaire les constantes, en des congruences (mod p). Dans l'énumération suivante les indices ξ, η sont ou réels, ou des nombres imaginaires et conjugués de la forme $a+b\varepsilon$, ε étant racine d'une congruence irréductible du second degré; ils sont réels ou imaginaires en même temps que les multiplicateurs de la première substitution, désignée par A et donnée sous forme canonique. Nous appellerons, avec M. Jordan, substitutions de la première espèce celles qui, mises sous forme canonique, multiplient les indices par des nombres différents, substitutions de la seconde espèce celles qui multiplient les deux indices par un même nombre, nécessairement réel, et nous dénoterons ces dernières en écrivant simplement le multiplicateur, par exemple

$$a = |\xi, \eta \quad a\xi, a\eta|, \qquad -1 = |\xi, \eta \quad -\xi, -\eta|.$$

Premier type. Les substitutions sont de la forme

$$A = |\xi, \eta \quad a\xi, b\eta|.$$

Deuxième type. Le groupe dérive d'un groupe de premier type combiné avec une substitution de la forme

$$B = |\xi, \eta \quad c\eta, d\xi|.$$

Troisième type (type *tétraédrique*). Le groupe dérive des substitutions

$$A = |\xi, \eta \quad i\xi, -i\eta|, \quad \text{où} \quad i^2+1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

$$B = |\xi, \eta \quad r\eta, s\xi|, \quad \text{où} \quad rs+1 \equiv 0.$$

$$C = \begin{vmatrix} \xi & m\dfrac{1-i}{2}(\xi - r\eta) \\ \eta & m\dfrac{1+i}{2}(-s\xi+\eta) \end{vmatrix}, \quad m \text{ étant réel.}$$

et d'un certain nombre de substitutions de la seconde espèce. Parmi celles-ci se trouvent toujours $A^2 = B^2 = -1$, $C^3 = -m^3$. L'ordre du groupe est égal à 12ω, ω étant l'ordre du groupe formé des substitutions de la seconde espèce contenues dans H'. Le groupe alterné entre quatre lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ est isomorphe à H'. En désignant par le signe $\sim$ qu'une substitution de H' correspond à une substitution entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on a

$$a \sim 1\,,\ aA \sim (\alpha\beta)(\gamma\delta)\,,\ aB \sim (\alpha\delta)(\beta\gamma)\,,\ aC \sim (\alpha\beta\gamma).$$

On doit évidemment omettre ce type quand $p = 3$.

Quatrième type (type *octaédrique*). Les groupes de ce type dérivent d'un groupe du troisième type et d'une substitution de la forme

$$D = |\,\xi, \eta \quad e\xi, ei\eta\,|,$$

où $e^2 \equiv fi$, f étant réel. Dans l'expression de la substitution C on peut toujours faire $m \equiv 1$. Le groupe symétrique entre 4 lettres est isomorphe à H'; on a

$$aD \sim (\alpha\gamma\beta\delta)\,,\ aBD \sim (\gamma\delta).$$

L'ordre du groupe est 24ω; par conséquent il doit être omis quand $p = 3$.

Cinquième type (type *icosaédrique*). Le groupe dérive de substitutions de la seconde espèce et des trois substitutions suivantes:

$$A = |\,\xi, \eta \quad \theta\xi, \theta^{-1}\eta\,|, \quad \text{où} \quad \frac{\theta^5 - 1}{\theta - 1} \equiv 0,$$

$$B = |\,\xi, \eta \quad r\eta, s\xi\,|, \quad \text{où} \quad rs + 1 \equiv 0,$$

$$C = \left|\begin{matrix} \xi & \lambda\xi + r\mu\eta \\ \eta & -s\mu\xi - \lambda\eta \end{matrix}\right|, \quad \text{où} \quad \lambda \equiv \frac{1}{\theta^3 - \theta^2}\,,\ \mu \equiv \frac{1}{\theta^4 - \theta},$$

et où par conséquent

$$\lambda^2 + \mu^2 + 1 \equiv 0.$$

Le groupe contient toujours la substitution $B^2 = C^2 = -1$; son ordre est égal à 60ω, ω ayant la même signification que plus haut; il n'existe que pour les nombres p de la forme $10h \pm 1$. Le groupe alterné entre cinq lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ est isomorphe au groupe icosaédrique; on a

$$aA \sim (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)\,,\ aB \sim (\beta\varepsilon)(\gamma\delta)\,,\ aC \sim (\beta\delta)(\gamma\varepsilon)\,,\ aA^3C \sim (\alpha\beta\gamma).$$

Le groupe H' appartient donc toujours à l'une de ces cinq types, et il peut être réduit à l'une des formes canoniques ci-dessus par une transformation linéaire, qui est réelle ou imaginaire en même temps que les indices ξ et η. S'ils sont réels, on peut simplement changer ξ et η en x et y, puisque toute substitution linéaire et réelle est permutable au groupe I. Au contraire, si ξ et η sont imaginaires, et qu'on veuille conserver I sous sa forme réelle, il faut réduire A, B, C, D à des formes réelles, ce qui ne présente pas de difficulté. Mais comme, dans la suite, nous pourrons nous servir des formes canoniques même s'ils sont imaginaires, nous omettrons ces calculs.

§ 3. *Sur le nombre n.*

6. Le groupe G contient $np + 1$ groupes de l'ordre p^{a+2}, que nous désignerons par

$$I_0, I_1, I_2, \ldots, I_{np}.$$

En les transformant tous par les substitutions de I_0, on obtient un groupe de substitutions entre les I_m, isomorphe à I_0. Si l'on réunit en systèmes ceux qui sont permutés entre eux d'une manière transitive, le nombre des groupes contenus dans chaque système est une puissance de p, I_0 seul formant un système du degré 1. On a donc une équation de la forme suivante:

$$np = n_1 p^{r_1} + n_2 p^{r_2} + n_3 p^{r_3} + \ldots$$

les nombres $r_1, r_2, r_3, \ldots$ étant tous égaux ou supérieurs à 1. Supposons que I_1 fasse partie d'un système du degré p^{r_1}; I_1 est évidemment permutable aux substitutions d'un groupe K de l'ordre p^{a+2-r_1} contenu dans I_0. Le groupe K sera aussi contenu dans I_1; en effet, si le nombre des substitutions communes à I_1 et à K est égal à p^{a+2-r_1-s}, le groupe dérivé des substitutions de I_1 et de K aura pour ordre p^{a+2+s}, d'où l'on conclut que $s = 0$, l'ordre de G n'étant pas divisible par p^{a+3}. Inversement, si les substitutions communes à I_0 et à I_1 forment un groupe de l'ordre p^{a+2-r_1}, I_1 fait évidemment partie d'un système du degré p^{r_1}. Spécialement, si $r_1 = 1$, I_1 appartient à un système du degré p; or K étant dans ce cas permutable aux substitutions de I_0, il sera contenu

dans tous les groupes du système, et sera permutable à leurs substitutions. Donc, si l'on désigne par $K_1, K_2, \ldots, K_m$ les groupes de l'ordre $p^{\alpha+1}$ contenus dans G, l'un quelconque d'entre eux, K_r, sera contenu dans les groupes d'un nombre n_r de systèmes, et l'on aura

$$np = n_1 p + n_2 p + \ldots + n_m p + n' p^2,$$

les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_m$ pouvant être nuls, tous ou en partie. Pour discuter cette équation nous distinguerons dans la suite plusieurs cas, qui diffèrent par l'espèce du groupe et par la valeur de α.

7. Commençons par les groupes de la première espèce où $\alpha = 0$. Les groupes K_r sont en nombre $p + 1$, chacun d'eux contenant les puissances d'une seule substitution

$$S = |\, x, y \quad x + a, y + b \,|;$$

nous ferons l'indice r congru au rapport $\frac{b}{a}$. Supposons que $K_{\frac{b}{a}}$ soit contenu dans les groupes des n_1 premiers systèmes, savoir les groupes $I_1, I_2, \ldots, I_{n_1 p}$, et soit G_1 le groupe formé des substitutions de G qui sont échangeables à S. Les substitutions de chacun des groupes I étant échangeables entre elles, G_1 contient $I_0, I_1, \ldots, I_{n_1 p}$, mais il ne contient aucun des groupes $I_{n_1 p+1} \ldots I_{np}$. Par conséquent son ordre est $p^2 \pi_1 (n_1 p + 1)$, π_1 étant l'ordre du groupe H_1' qui contient les substitutions de H' échangeables à S. De plus, $K_{\frac{b}{a}}$ étant intransitif, G_1 est non-primitif, ses substitutions remplaçant les éléments de chaque cycle de S par les éléments d'un même cycle. Il existe donc un groupe G_1' du degré p, isomorphe à G_1, et l'on voit aisément que son ordre sera

$$p \pi_1 (n_1 p + 1),$$

ce qui réduit très considérablement les valeurs que peuvent avoir n_1 et π_1. Notamment on sait, en vertu de deux théorèmes de M. E. Mathieu (Journal de Liouville, année 1861, p. 310) qu'on ne peut avoir $\pi_1 = 1$, sans avoir $n_1 = 0$, et qu'on a également $n_1 = 0$, si $\pi_1 = 2$, $p = 4h + 3$.

Recherchons donc quelles sont les substitutions de H' qui peuvent être échangeables à une substitution de I_0. Soit

$$T = | x , y \quad \alpha x + \beta y , \gamma x + \delta y |$$

une substitution de H', et supposons que, réduite à sa forme canonique, elle devienne

$$T = | \xi , \eta \quad s_1 \xi , s_2 \eta |;$$

on sait que s_1 et s_2 sont les racines de la congruence

$$s^2 - (\alpha + \delta)s + \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 0 \pmod p,$$

et qu'on peut faire

$$\xi = (s_1 - \delta)x + \beta y, \qquad \eta = (s_2 - \delta)x + \beta y.$$

Exprimant S par les nouveaux indices on a

$$S = | \xi , \eta \quad \xi + A , \eta + B |,$$

où

$$A = (s_1 - \delta)a + \beta b, \qquad B = (s_2 - \delta)a + \beta b,$$

et l'on trouve

$$T^{-1}ST = | \xi , \eta \quad \xi + s_1 A , \eta + s_2 B |.$$

Pour que T soit permutable au groupe $K_{\frac{b}{a}}$, il faut que $T^{-1}ST = S^m$, d'où

$$(s_1 - m)A \equiv 0, \qquad (s_2 - m)B \equiv 0 \pmod p.$$

Donc si T n'appartient pas à la seconde espèce, il faut avoir

$$s_1 \equiv m, \quad B \equiv 0, \quad \text{ou} \quad s_2 \equiv m, \quad A \equiv 0.$$

Le nombre m étant réel par définition, on a le résultat suivant: parmi les substitutions de la première espèce de H' celles seulement qui sont réductibles à des formes canoniques réelles, peuvent être permutables à un groupe d'ordre p contenu dans I_0; inversement, chacune de ces substitutions est permutable à deux groupes, savoir

K[illegible], et K[illegible],

et n'est pas permutable aux autres.

Si T doit être échangeable à S, il faut de plus que l'un de ses multiplicateurs soit congru à 1; en supposant $s_1 \equiv 1$, on a

$$1 - \alpha - \delta + s_2 \equiv 0;$$

alors T est échangeable aux substitutions du groupe

$$K_{\frac{1-\alpha}{\beta}},$$

et il est en outre permutable au groupe $K_{\frac{\delta-1}{\beta}}$.

Soit maintenant T une substitution de H' de la première espèce et échangeable à S; réduite à sa forme canonique elle sera

$$T = |\,\xi, \eta \quad \xi, s_2\eta\,|,$$

et l'on aura

$$S = |\,\xi, \eta \quad \xi + A, \eta\,|.$$

Les substitutions de H' permutables au groupe $K_{\frac{b}{a}}$ ont la forme suivante

$$T' = |\,\xi, \eta \quad m_1\xi + r\eta, m_2\eta\,|;$$

mais on trouve

$$T^{-1}T'T\,.\,T'^{-1} = \left|\,\xi, \eta \quad \xi + r\frac{1 - s_2}{s_2 m_1}\eta, \eta\,\right|,$$

ce qui montre qu'on doit avoir $r \equiv 0 \pmod p$. Il s'ensuit que toutes ces substitutions sont échangeables entre elles. En particulier les substitutions de H' échangeables à S sont les puissances d'une seule d'entre elles; soit T cette substitution. De plus toute substitution de H' permutable à $K_{\frac{b}{a}}$ est le produit d'une puissance de T par une puissance d'une seule substitution

$$T_1 = |\,\xi, \eta \quad a_1\xi, b_1\eta\,|.$$

Les substitutions de G qui sont permutables à $K_{\frac{b}{a}}$ forment un groupe G_2, qui contient T_1 et les substitutions de G_1, mais ne contient aucun des groupes $I_{n_1p+1}, I_{n_1p+2}, \ldots$. Par conséquent son ordre est égal à $p^2\pi_1\pi_2(n_1p+1)$, où π_2 est l'exposant de la plus petite puissance de a_1

congrue à 1. Le groupe G_2 est non-primitif, tout comme G_1; donc il existe un groupe G_2' du degré p, isomorphe à G_2; l'ordre de ce groupe est évidemment

$$p\pi_1\pi_2'(n_1p + 1),$$

π_2' désignant l'exposant de la plus petite puissance de b_1 congrue à une puissance de s_2. Si $\pi_2' > 1$, cela donne une nouvelle réduction des valeurs de n_1.

8. Supposons que H' soit du premier type, et supposons que ses substitutions soient ramenées à la forme canonique

$$|\xi, \eta \quad a\xi, b\eta|.$$

Si maintenant ξ et η sont imaginaires, a et b ne peuvent être réels sans être congrus $(\bmod\, p)$, donc, outre la substitution identique, aucune substitution de H' n'est échangeable à une substitution de I_0. Par suite les nombres $n_1, n_2, \ldots$ sont nuls, et l'ordre de G est de la forme

$$O = p^2\pi(n'p^2 + 1),$$

π étant un diviseur de $p^2 - 1$.

Si au contraire ξ et η sont réels, il est permis de les remplacer par x et y. Parmi les groupes d'ordre p, contenus dans I_0, il n'y a que deux, savoir K_0 et K_∞, dont les substitutions sont échangeables à des substitutions non identiques de H'. Soit δ_1 l'ordre du groupe contenu dans H' dont les substitutions sont de la forme

$$|x, y \quad x, m_1y|,$$

et δ_2 l'ordre de celui dont les substitutions sont de la forme

$$|x, y \quad m_2x, y|,$$

on aura

$$\pi = \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta.$$

D'après les numéros 6 et 7, on a

$$O = p^2\pi(n'p^2 + n_1p + n_2p + 1).$$

π étant un diviseur de $(p-1)^2$. Le nombre

$$p\delta_1\delta_3(n_1p+1)$$

doit être l'ordre d'un groupe du degré p, contenant un autre de l'ordre

$$p\delta_1(n_1p+1);$$

pareillement

$$p\delta_2\delta_3(n_2p+1)$$

est l'ordre d'un groupe du degré p, contenant un autre du degré

$$p\delta_2(n_2p+1).$$

On a $n_1=0$ si $\delta_1=1$, et $n_2=0$ si $\delta_2=1$; quand p est de la forme $4h+3$, on a même $n_1=0$ si $\delta_1=2$, et $n_2=0$ si $\delta_2=2$. Les substitutions de H' étant toutes permutables aux groupes K_0, K_∞, l'ordre des groupes que nous avons désignés par G_2 est $p^2\pi(n_ip+1)$. Il s'ensuit que $n'p+n_2$ est divisible par n_1p+1, et $n'p+n_1$ divisible par n_2p+1.

9. Considérons le cas où H' appartient au deuxième type. La moitié des substitutions de H' ont la forme

$$S=|\xi,\eta \quad a\xi, b\eta|,$$

et forment un groupe H'' de l'ordre $\frac{\pi}{2}$; les autres sont de la forme

$$T=|\xi,\eta \quad c\eta, d\xi|.$$

Supposons *en premier lieu* que ξ et η soient réels; ils peuvent alors être remplacés par x et y, sans changer la forme du groupe I_0. Nous écrirons donc

$$S=|x,y \quad ax, by|, \qquad T=|x,y \quad cy, dx|.$$

Puisque H'' contient la substitution $T^{-1}ST=|x,y \quad bx, ay|$, les valeurs de a et de b sont les mêmes; elles sont donc les puissances d'une seule d'entre elles. Nous conserveront la lettre a pour désigner cette valeur, en la supposant racine primitive de la congruence

$$z^\delta \equiv 1 \pmod p.$$

Le groupe H'' en contient un autre donc les substitutions ne font pas varier l'indice x; ce groupe est formé des puissances d'une seule substitution

$$\varphi = | x , y \quad x , a^{\delta'} y | ;$$

on peut supposer que δ' soit un diviseur de δ; en faisant

$$\delta = \delta_1 \delta',$$

l'ordre du groupe dont nous parlons est δ_1. De plus H'' contient une substitution de la forme suivante:

$$\varphi' = | x , y \quad ax , a^t y |;$$

évidemment toutes ses substitutions sont contenues dans l'expression $\varphi^n \varphi'^m$, et l'ordre de H'' est égal à $\delta_1^2 \delta'$, d'où

$$\pi = 2 \delta_1^2 \delta'.$$

D'autre côté H'' dérive aussi des substitutions

$$\varphi_1 = T^{-1} \varphi T = | x , y \quad a^{\delta'} x , y |, \qquad \varphi_1' = T^{-1} \varphi' T = | x , y \quad a^t x , ay | .$$

En exprimant que φ_1' peut être égalé à $\varphi^m \varphi'^{m'}$, on obtient la congruence

$$t^2 - 1 \equiv 0 \pmod{\delta'}.$$

Les seules substitutions de H'' échangeables à des substitutions non identiques de I_0 sont donc les puissances de φ et de φ_1, qui sont échangeables respectivement aux substitutions des groupes K_0 et K_∞. Or, en supposant que G contienne $n_1 p + 1$ groupes d'ordre p^2 dont les substitutions sont échangeables à celles de K_0, on en déduit, en les transformant par T, un nombre égal qui ont leurs substitutions échangeables à celles de K_∞. Toutes les substitutions de H'' sont permutables aux groupes K_0, K_∞; le nombre des substitutions qu'elles produisent entre les cycles de chaque groupe est évidemment égal à δ.

Voyons maintenant dans quels cas une substitution de la forme T est échangeable à des substitutions de I_0. En réduisant T à sa forme canonique, on trouve

$$T = | \xi , \eta \quad \sqrt{cd}\, \xi , - \sqrt{cd}\, \eta | ;$$

il faut donc que $cd \equiv 1 \pmod{p}$, donc

$$T = |x, y \quad cy, c^{-1}x|.$$

On obtient toutes les substitutions de H' de cette forme, en multipliant l'une d'elles par les substitutions de H'' dont les déterminants sont congrus à 1. Ce sont les substitutions

$$|x, y \quad a^{h\delta_3}x, a^{-h\delta_3}y|,$$

où l'on a fait

$$t + 1 = \delta_2\tau, \qquad \delta' = \delta_2\delta_3,$$

et par suite

$$\delta = \delta_1\delta_2\delta_3, \qquad \pi = 2\delta_1^2\delta_2\delta_3,$$

δ_3 et τ étant premiers entre eux. Le nombre h peut avoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (\delta_1\delta_2 - 1)$. Donc, si H' contient une substitution de la forme $|x, y \quad cy, c^{-1}x|$, il en contient un nombre de $\delta_1\delta_2$.

Telle que nous l'avons déterminée, la substitution T est échangeable aux substitutions du groupe K_{c-1}, c'est-à-dire aux puissances de

$$|x, y \quad x + c, y + 1|;$$

outre la substitution identique, elle est la seule substitution de H' qui possède cette propriété. Or, si G contient un groupe G_1 de l'ordre $p^2 . 2(n_2p + 1)$, dont les substitutions sont échangeables à celles de K_{c-1}, on en peut conclure l'existence d'un autre ayant ses substitutions échangeables à celles de K_{rc-1}, pourvu que G contienne une substitution qui transforme K_{c-1} en K_{rc-1}. Sans une connaissance plus intime du groupe G, nous ne pouvons chercher cette substitution que dans H''. Les substitutions de celui-ci transforment K_{c-1} en $K_{a^\mu c-1}$, le nombre μ pouvant être égalé à un multiple quelconque du plus grand commun diviseur de $\delta_2\delta_3$ et $t - 1$. Or on a vu que $\delta_2\delta_3$ divise $t^2 - 1$, et que δ_2 est le plus grand commun diviseur de $\delta_2\delta_3$ et $t + 1$, donc δ_3 divise $t - 1$. En désignant le plus grand commun diviseur de $\delta_2\delta_3$ et $t - 1$ par

$$\varepsilon\delta_3,$$

ε divisera $t - 1$ et $t + 1$; on a donc $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = 2$.

Quand $\varepsilon = 1$, K_{c-1} peut être transformé en tout autre groupe d'ordre p qui a ses substitutions échangeables à une substitution de la forme T; donc tous les groupes G_1 correspondants sont de l'ordre $p^2 . 2(n_2 p + 1)$. Quand au contraire $\varepsilon = 2$, K_{c-1} ne peut être transformé qu'en $K_{c-1}{}_{a^{2h\delta_3}}$; donc la moitié des groupes G_1 sont de l'ordre $p^2 . 2(n_2 p + 1)$, les autres pouvant être d'un ordre différent, $p^2 . 2(n_3 p + 1)$.

Le groupe K_{c-1} est permutable aux substitutions du groupe d'ordre $2\delta_1\delta_3\varepsilon$ qui dérive de T et des substitutions de la seconde espèce de H''. Ces substitutions produisent, entre les cycles de K_{c-1} un groupe dont l'ordre est égal à $2\delta_1\delta_3\varepsilon$ ou seulement à $\delta_1\delta_3\varepsilon$, suivant que $\delta_1\delta_3\varepsilon$ est impair ou pair. En effet, la substitution $-1 . T$ ne déplace pas les cycles de K_{c-1}.

On possède maintenant les données nécessaires pour appliquer les résultats du numéro 7. On a, si $\varepsilon = 1$

$$O = p^2\pi(n'p^2 + 2n_1 p + \delta_1\delta_2 n_2 p + 1),$$

et, si $\varepsilon = 2$,

$$O = p^2\pi\left(n'p^2 + 2n_1 p + \frac{\delta_1\delta_2}{2} n_2 p + \frac{\delta_1\delta_2}{2} n_3 p + 1\right).$$

Les nombres n_i sont compatibles avec l'existence d'un groupe du degré p et de l'ordre $p\pi_1\pi'_2(n_i p + 1)$, contenant un second groupe de l'ordre $p\pi_1(n_i p + 1)$. Pour $i = 1$ on a

$$\pi_1 = \delta_1, \qquad \pi'_2 = \delta_2\delta_3;$$

pour $i = 2$ ou 3

$$\pi_1 = 2, \qquad \pi'_2 = \frac{\delta_1\delta_3\varepsilon}{2} \quad \text{ou} \quad \delta_1\delta_3\varepsilon$$

suivant que $\delta_1\delta_3\varepsilon$ est pair ou impair. En particulier on a $n_1 = 0$ si $\delta_1 = 1$, ou si $\delta_1 = 2$ avec $p = 4h + 3$; on a $n_2 = n_3 = 0$ si $p = 4h + 3$, et toutes les fois que G ne contient pas de substitution de la forme $|x, y \quad cy, c^{-1}x|$. Enfin G contient des groupes des ordres

$$p^2 \frac{\pi}{2}(n_1 p + 1), \; p^2 . 2\delta_1\delta_3\varepsilon(n_2 p + 1) \quad \text{et} \quad p^2 . 2\delta_1\delta_3\varepsilon(n_3 p + 1).$$

Considérons en *second lieu* le cas où ξ, η sont imaginaires. Les substitutions de H' de la forme S sont les puissances d'une seule d'entre elles, que nous désignerons par

$$S = |\, \xi\,, \eta \quad a\xi\,, a^r\eta\,|,$$

en supposant a racine primitive de la congruence

$$z^m \equiv 1 \pmod{p};$$

elles forment un groupe H'' de l'ordre $\frac{\pi}{2}$. Le nombre m est un diviseur de $p^2 - 1$; en supposant

$$p^2 - 1 = m\,.\,m',$$

on peut faire

$$a = j^{m'},$$

j étant une racine primitive de la congruence

$$z^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

En posant

$$m = \delta_1\delta_2, \qquad p + 1 = \delta_1\delta_3,$$

δ_2 et δ_3 étant premiers entre eux, on a

$$m' = \delta_3\delta_4, \qquad p - 1 = \delta_2\delta_4, \qquad \pi = 2\delta_1\delta_2.$$

Outre la substitution identique, aucune substitution de H'' n'est échangeable à une substitution de I_0; en effet les multiplicateurs a^r, a^{rp} sont imaginaires ou égaux. Parmi les autres substitutions de H' les

$$T = |\, \xi\,, \eta \quad c\eta\,, c^{-1}\xi\,|$$

seules sont échangeables aux substitutions d'un groupe K; comme $c\eta, c^{-1}\xi$ sont des nombres conjugués, on a $c^{p+1} \equiv 1$. On obtient toutes les substitutions de H' de cette forme en multipliant l'une d'elles par les substitutions de H'' à déterminant 1, c'est-à-dire par les

$$|\, \xi\,, \eta \quad a^{h\delta_2}\xi\,, a^{ph\delta_2}\eta\,|.$$

Par suite ou H' ne contient aucune substitution de la forme

$$|\, \xi\,, \eta \quad r\eta\,, r^{-1}\xi\,|,$$

ou il en contient δ_1, savoir les

$$\text{(a)} \qquad |\xi, \eta \quad a^{h\delta_2}c\eta, a^{-h\delta_2}c^{-1}\xi|.$$

En transformant T par S^{-t}, on trouve

$$S^tTS^{-t} = |\xi, \eta \quad a^{(p-1)t}c\eta, a^{-(p-1)t}c^{-1}\xi|;$$

or on peut rendre $a^{(p-1)t}$ ou $a^{\delta_2\delta_4 t}$ congru à

$$a^{h\varepsilon\delta_2},$$

où h est un entier quelconque, ε désignant le plus grand commun diviseur de δ_1 et δ_4; on a $\varepsilon = 2$ si δ_1 et δ_4 sont pairs, $\varepsilon = 1$ dans les autres cas. Donc si $\varepsilon = 1$, les δ_1 substitutions (a) peuvent être transformées les unes dans les autres par les substitutions de H'; au contraire, si $\varepsilon = 2$, on en peut déduire la moitié de la substitution T, l'autre moitié de $a^{\delta_2}T$. Dans le premier cas tous les groupes G_1 qui répondent aux diverses substitutions (a) ont le même ordre $p^2 . 2(n_1p + 1)$, dans le second la moitié des groupes G_1 sont de l'ordre $p^2 . 2(n_1p + 1)$, les autres pouvant avoir un ordre différent $p^2 . 2(n_2p + 1)$.

Enfin le groupe formé des substitutions de H' qui sont permutables au groupe K_{c-1} dérive de T et des substitutions de la seconde espèce contenues dans H'' savoir les

$$|\xi, \eta \quad a^{\frac{h\delta_1}{\varepsilon}}\xi, a^{\frac{h\delta_1}{\varepsilon}}\eta|;$$

l'ordre de ce groupe est donc $2\delta_2\varepsilon$; il produit entre les cycles de K_{c-1} un groupe dont l'ordre est $2\delta_2\varepsilon$ ou $\delta_2\varepsilon$ suivant que $\delta_2\varepsilon$ est impair ou pair.

En vertu du numéro 7, on peut maintenant faire les conclusions suivantes:

Si $\varepsilon = 1$, on a

$$O = p^2\pi(n'p^2 + \delta_1 n_1 p + 1);$$

si $\varepsilon = 2$,

$$O = p^2\pi\left(n'p^2 + \frac{\delta_1}{2} n_1 p + \frac{\delta_1}{2} n_2 p + 1\right);$$

il existe des groupes du degré p des ordres

$$p . 2(n_1p + 1), \; p . 2(n_2p + 1)$$

contenus dans d'autres groupes, dont les ordres sont respectivement

$$p \,.\, 2\delta_2\varepsilon(n_1 p + 1) \,,\; p \,.\, 2\delta_2\varepsilon(n_2 p + 1), \quad \text{si } \delta_2\varepsilon \text{ est impair,}$$

ou

$$p\delta_2\varepsilon(n_1 p + 1) \,,\; p\delta_2\varepsilon(n_2 p + 1), \quad \text{si } \delta_2\varepsilon \text{ est pair.}$$

On a $n_1 = n_2 = 0$, quand p est de la forme $4h + 3$, et quand le groupe G ne contient pas de substitution de la forme

$$|\, \xi \,,\, \eta \quad c\eta \,,\, c^{-1}\xi \,|.$$

Enfin le groupe G en contient d'autres des ordres

$$p^2 .\, 2\delta_2\varepsilon(n_1 p + 1) \,,\; p^2 .\, 2\delta_2\varepsilon(n_2 p + 1).$$

10. Quand H' est tétraédrique, le nombre p est > 3. Les substitutions de H' sont les

$$a \,,\, aA \,,\, aB \,,\, aAB \,,\, aC^r ,\, aA^{-1}C^rA \,,\, aB^{-1}C^rB \,,\, aB^{-1}A^{-1}C^rAB,$$

les lettres ayant la même signification qu'au numéro 5. Les substitutions aA sont permutables aux groupes K_0, K_∞, pourvu que ξ et η soient réels. Cela exige que -1 soit résidu quadratique de p, c'est-à-dire que p soit de la forme $4h + 1$. Or si H' contient la substitution i ou $|\, \xi \,,\, \eta \quad i\xi \,,\, i\eta \,|$, il contient iA et $-iA$, qui sont échangeables respectivement aux substitutions des groupes K_∞ et K_0. Comme on a

$$B^{-1}\, iAB = -\, iA,$$

les deux groupes G_1 qui correspondent à K_0 et à K_∞ sont les transformés l'un de l'autre; ils sont donc d'un même ordre $p^2 .\, 2(n_1 p + 1)$. En transformant $\pm\, iA$ par C et C^2, on en déduit $\pm\, iB$, $\pm\, iAB$; donc G contient six groupes de l'espèce que nous avons désignée par G_1, tous de l'ordre $p^2 .\, 2(n_1 p + 1)$. Les groupes G_1' du degré p qui y correspondent ont pour ordre $p \,.\, 2(n_1 p + 1)$. Les groupes G_2 qui répondent aux six groupes G_1 sont évidemment de l'ordre $p^2 .\, 2\omega(n_1 p + 1)$; mais comme la substitution iA ne permute pas les cycles de K_0, l'ordre des groupes G_2' sera $p \,.\, \omega(n_1 p + 1)$.

Le déterminant de la substitution aC étant a^2m^2, sa congruence caractéristique est

$$s^2 - ams + a^2m^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

d'où

$$s \equiv am \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Pour que la forme canonique de aC soit réelle, il faut donc que p soit de la forme $3h+1$. On trouve ainsi

$$aC = \left| \xi', \eta' \quad am\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\xi', am\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\eta' \right|.$$

La condition relative au nombre p étant remplie, aC est permutable à deux des groupes K, que nous désignerons par K', K''. Les substitutions aC^r sont les seules permutables à ces groupes; en effet, dans le cas contraire, H' contiendrait un groupe d'un ordre au moins égal à 6ω, à substitutions échangeables entre elles (n° 7); par conséquent il existerait, entre quatre lettres, un groupe de l'ordre 6 ou 12, contenant exclusivement des substitutions échangeables entre elles, ce qui est absurde. Or, si l'on a

$$a \equiv \frac{1}{m}\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

la substitution aC est échangeable aux substitutions de K'; si

$$a \equiv \frac{1}{m}\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

elle est échangeable à celles de K''. Dans le premier cas H' contient la substitution $m\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, dans le second $m\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$; s'il contient l'une et l'autre, il contient leur produit m^2, et, en vertu du n° 5, m^3, et par suite m, c'est-à-dire qu'on peut faire $m=1$. Soient, pour abréger, C' et C'' les substitutions qui répondent aux deux valeurs de a:

$$C' = \left| \xi', \eta' \quad \xi', -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\eta' \right|, \qquad C'' = \left| \xi', \eta' \quad -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\xi', \eta' \right|;$$

C'' n'est pas la transformée de C' par une substitution de H'; c'est ce

qu'on voit sans calcul, en se souvenant de la correspondance qui a lieu entre les substitutions de H' et celles du groupe alterné entre quatre lettres. L'ordre du groupe G_1, formé par les substitutions de G échangeables à celles de K', peut évidemment être exprimé par $p^2.3(n_2p+1)$; celui de G'_1 est donc $p.3(n_2p+1)$. Le groupe G_2 est de l'ordre $p^2.3\omega(n_2p+1)$. Or les substitutions communes à G_2 et H' sont les aC^r; s'il s'en trouve parmi elles qui ne permutent pas les cycles de K', ce ne peut être que les puissances de C''; cette circonstance ne se présente donc que dans le cas où l'on peut faire $m=1$. Par suite l'ordre du groupe G'_2 sera $p\omega(n_2p+1)$ si $m=1$; mais il sera $p.3\omega(n_2p+1)$ dans le cas contraire. Quant aux groupes analogues qui répondent à K'', il suffit de remplacer n_2 par une autre lettre n_3. Des substitutions C', C'' on déduit, en les transformant par A, B, AB, six autres substitutions, échangeables respectivement aux substitutions de six autres des groupes K_r. Donc on a quatre groupes de l'espèce G_1 qui sont de l'ordre $p^2.3(n_2p+1)$, et quatre de l'ordre $p^2 3(n_3p+1)$.

De ce qui précède on tire les conclusions suivantes:

L'ordre de G est déterminé par la formule

$$O=p^2.12\omega(n'p^2+6n_1p+4n_2p+4n_3p+1).$$

On a $n_1=0$, quand p est de la forme $12h+7$ ou $12h+11$,
et quand H' ne contient pas la substitution i,

$n_2=n_3=0$, quand p est de la forme $12h+5$ ou $12h+11$,

$n_2=0$, quand G ne contient pas la substitution $m\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$,

$n_3=0$, quand G ne contient pas la substitution $m\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$.

Les nombres n_r sont compatibles avec l'existence d'un groupe du degré p et de l'ordre $p.\pi_1.\pi'_2(n_rp+1)$, contenant un groupe de l'ordre $p.\pi_1(n_rp+1)$; pour $r=1$ on a $\pi_1=2$, $\pi'_2=\frac{\omega}{2}$; pour $r=2$ et $r=3$, on a $\pi_1=3$, et, si H' contient la substitution m, $\pi'_2=\frac{\omega}{3}$; dans le cas contraire on a $\pi'_2=\omega$. Enfin G contient des groupes des ordres

$$p^2.2\omega(n_1p+1),\ p^2.3\omega(n_2p+1),\ p^2.3\omega(n_3p+1).$$

11. Quand H' est octaédrique, on a aussi $p > 3$. Les substitutions de H' sont: les substitutions d'un groupe tétraédrique où l'on a $m = 1$, les 6ω transformées des aD, les 6ω transformées des aBD. On connaît déjà les groupes K_r qui sont permutables aux substitutions tétraédriques, et l'on connaît les substitutions tétraédriques qui sont échangeables aux substitutions de ces groupes; mais évidemment on ne peut employer immédiatement ce qui a été dit sur l'ordre des groupes G_1, G'_1, G_2, G'_2 qui s'y rapportent.

Les substitutions aD ou $|\xi, \eta \quad ae\xi, aei\eta|$ sont permutables aux groupes K_0 et K_∞, comme le sont les aA, pourvu que $p = 4h + 1$; en effet e est réel en même temps que ξ. Donc le groupe G_1 correspondant à K_0 est de l'ordre $p^2.2(n_1p + 1)$, si H' contient la substitution i, mais ne contient pas e. Si H' contient e il contient aussi i; en effet D^2A se réduit à e^2i; dans ce cas l'ordre de G_1 est $p^2.4(n_1p + 1)$. Le groupe G_2 est de l'ordre $p^2.4\omega(n_1p + 1)$; G'_2 est de l'ordre $p\omega(n_1p + 1)$, quand H' contient e, mais de l'ordre $p.2\omega(n_1p + 1)$ dans le cas contraire; c'est ce qu'on voit en remarquant que la substitution $e^{-1}i^{-1}D$ ne permute pas les cycles de K_0.

On a vu, au numéro précédent, que les substitutions aC^r sont permutables aux deux groupes K', K''; évidemment elles sont les seules substitutions de H' permutables à ces groupes. Dans le cas qui nous occupe, les groupes K', K'', ainsi que les substitutions C'^r, C''^r, se transforment l'un dans l'autre au moyen de la substitution

$$F = ABD.$$

En effet, dans le groupe symétrique entre les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, qui est isomorphe à H', la substitution $(\alpha\beta\gamma)$ correspond à C, $(\alpha\beta)$ à F, donc $F^{-1}CF$ et C^2 correspondent à $(\alpha\gamma\beta)$ d'où

$$F^{-1}CF = aC^2;$$

comme d'ailleurs C a son déterminant congru à 1, on doit avoir

$$F^{-1}CF = \pm 1 . C^2,$$

d'où

$$F^{-1}C^8F = \pm 1 . C^{16};$$

or, comme on a $C^3 = -1$, on en conclut qu'il faut prendre le signe inférieur, donc

$$F^{-1}CF = -C^2.$$

En faisant, pour un moment, $\alpha = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$, on a

$$\alpha C = C', \qquad \frac{1}{\alpha} C = C'',$$

$$F^{-1}C'F = -\alpha C^2 = \frac{1}{\alpha^2} C^2 = C''^2,$$

$$F^{-1}C''F = -\frac{1}{\alpha} C^2 = \alpha^2 C^2 = C'^2.$$

Ainsi, dans le résultat final, les deux termes au coefficient 4 qui se présentent dans le cas où H est tétraédrique, se réunissent ici en un seul terme au coefficient 8. Les ordres des groupes G_1, G_1', G_2, G_2' sont évidemment les mêmes que dans le cas précédent en supposant $m = 1$.

On a

$$aBD = | \xi, \eta \quad are\eta, asei\xi |;$$

la congruence caractéristique de cette substitution étant

$$\sigma^2 + a^2e^2i \equiv 0 \pmod p,$$

elle se réduit à la forme canonique

$$aBD = | \xi', \eta' \quad ae\sqrt{-i}\xi', -ae\sqrt{-i}\eta' |.$$

Pour que ξ', η' soient réels, il faut que $e\sqrt{-i}$ le soit. En supposant $p = 4h + 1$, e est réel; par conséquent il faut que $-i$ soit résidu quadratique de p, c'est-à-dire que p doit être de la forme $8h' + 1$. A cette condition aBD est permutable à deux des groupes K_r, que nous désignerons par K''', K''''; d'autre côté on voit que les a et aBD sont les seules substitutions de H' permutables à ces groupes. Si maintenant H' contient la substitution $e\sqrt{-i}$, on peut faire

$$a = \pm \frac{1}{e\sqrt{-i}};$$

on obtient ainsi les deux substitutions

$$|\,\xi', \eta' \quad \xi', -\eta'\,|, \qquad |\,\xi', \eta' \quad -\xi', \eta'\,|,$$

échangeables respectivement aux substitutions de K''' et de K''''. D'ailleurs ces substitutions sont les transformées l'une de l'autre, car en effet on a

$$A^{-1}BDA = -BD;$$

K'''' est donc la transformée de K''' par A. Il s'ensuit qu'en transformant le groupe G_1 correspondant à K''' par les substitutions de H', on obtient douze groupes G_1; tous de l'ordre $p^2 . 2(n_3 p + 1)$. Les groupes G_1', G_2, G_2' ont respectivement pour ordre $p . 2(n_3 p + 1)$, $p^2 . 2\omega(n_3 p + 1)$, $p\omega(n_3 p + 1)$, comme on le voit aisément.

Quand $p = 4h + 3$, le nombre n_3 est nécessairement nul; en effet la supposition contraire entraînerait l'existence d'un groupe du degré p et de l'ordre $p . 2(n_3 p + 1)$.

On a donc le résultat suivant:

$$O = p^2 . 24\omega . (n'p^2 + 6n_1 p + 8n_2 p + 12n_3 p + 1);$$

$n_1 = 0$, quand $p = 24h + 7, 11, 19, 23$, et quand H' ne contient pas la substitution i;

$n_2 = 0$, quand $p = 24h + 5, 11, 17, 23$, et quand H' ne contient pas la substitution $\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$;

$n_3 = 0$, quand $p = 24h + 5, 7, 11, 13, 19, 23$, et quand H' ne contient pas la substitution $e\sqrt{-i}$.

Les nombres n_r admettent l'existence d'un groupe du degré p et de l'ordre $p\pi_1\pi_2'(n_r p + 1)$, contenant un autre de l'ordre $p\pi_1(n_r p + 1)$, où les nombres π_1, π_2' sont déterminés de la manière suivante:

pour $r = 1$, on a $\pi_1 = 4$, $\pi_2' = \frac{\omega}{4}$, ou $\pi_1 = 2$, $\pi_2' = \omega$, suivant que H' contient e ou non.

$r = 2$, $\quad \pi_1 = 3$, $\quad \pi_2' = \frac{\omega}{3}$;

$r = 3$, $\quad \pi_1 = 2$, $\quad \pi_2' = \frac{\omega}{2}$.

Enfin le groupe G contient des groupes des ordres

$$p^2.4\omega(n_1p+1)\,,\; p^2.3\omega(n_2p+1)\,,\; p^2.2\omega(n_3p+1).$$

12. Quand H' est icosaédrique, le nombre p est de l'une des formes $10h+1$, $10h-1$. Par une analyse toute semblable à la précédente on trouve:

$$O=p^2.60\omega(n'p^2+12n_1p+20n_2p+30n_3p+1),$$

où

$n_1=0$, quand $p=60h+19\,,\,29\,,\,49\,,\,59$, et quand H' ne contient pas la substitution θ;

$n_2=0$, quand $p=60h+11\,,\,29\,,\,41\,,\,59$, et quand H' ne contient pas la substitution $\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$;

$n_3=0$, quand $p=60h+11\,,\,19\,,\,31\,,\,59$, et quand H' ne contient pas la substitution i.

Le nombre n_r admet l'existence d'un groupe du degré p et de l'ordre $p\omega(n_rp+1)$, contenant un autre de l'ordre $p\pi_1(n_rp+1)$, où pour $r=1,2,3$, le nombre π_1 est respectivement égal à $5\,,\,3\,,\,2$. Le groupe G contient des groupes des ordres $p^2.5\omega(n_1p+1)\,,\, p^2.3\omega(n_2p+1)\,,\, p^2.2\omega(n_3p+1)$.

On remarque que dans les cas où H' est de l'une des trois types polyédriques, les coefficients qui, dans l'expression de O, multiplient les termes en n_rp, sont les nombres des sommets, des faces et des arêtes des polyèdres correspondants.

13. Le cas où G est de la seconde espèce, α étant nul, est facile à traiter. En effet, I_0 ne contient que les puissances de la substitution

$$t=|\,x\,,\,y \quad x+(y)_{p-1}\,,\,y+1\,|;$$

par conséquent il ne contient qu'un seul groupe K de l'ordre p, qui est formé des substitutions

$$t^{ap}=|\,x\,,\,y \quad x+a\,,\,y\,|.$$

En supposant K contenu dans n_1 des groupes I_r, il existera un groupe G_1' du degré p et de l'ordre $p\pi_1(n_1p+1)$, où le nombre π_1 est l'ordre

du groupe renfermant les substitutions de H' échangeables à t^p. Or, les substitutions de H' étant toutes de la forme

$$\left| x\,, y \quad ax + E\left(\frac{ay}{p}\right), \; ay \right|,$$

on a évidemment $\pi_1 = 1$, d'où $n_1 = 0$. Donc l'ordre de G est exprimé par la formule

$$O = p^2\pi(n'p^2 + 1).$$

14. De ce qui est dit aux numéros précédents on peut conclure que, si $\alpha = 0$ et $\pi = 1$, on a $n = 0$. En effet, sous cette hypothèse le groupe G est de l'ordre $p^2(n'p^2 + 1)$, et contient $n'p^2 + 1$ groupes de l'ordre p^2. Deux quelconques de ces groupes n'ayant en commun que la substitution identique, le nombre des substitutions des ordres p et p^2 est égal à $(p^2 - 1)(n'p^2 + 1)$; ces substitutions déplacent tous les éléments. Les substitutions qui ne déplacent pas un élément donné quelconque $u_{x,y}$ sont en nombre $n'p^2 + 1$; par conséquent elles coïncident avec les $n'p^2 + 1$ substitutions dont l'ordre est premier à p, en d'autres termes, ces dernières ne déplacent aucun élément. Donc $n' = n = 0$.

On a ainsi le théorème suivant, analogue au premier des théorèmes de M. Mathieu, cités plus haut:

Tout groupe transitif G du degré p^2 contient un groupe transitif Γ d'ordre p^2; si G ne contient pas de groupe plus général dont les substitutions sont permutables à Γ, G coïncide avec Γ.

15. Soit maintenant $\alpha = 1$, et supposons que G soit de la première espèce. Un groupe K de l'ordre p^2 contenu dans I_0 et I_1 pourrait être transitif ou intransitif. Si K est intransitif il est formé des substitutions $\theta_0^{m}\theta_1^{m_1}$; une substitution T de I_1, étrangère à K, transformera θ_0 en θ_0^a, car évidemment θ_0 et ses puissances sont les seules substitutions de K qui déplacent tous les éléments. Par conséquent T aura la forme suivante:

$$T = | x\,, y \quad ax + \varphi_1(y)\,, \varphi_2(y) |.$$

De plus T transformera θ_1 en $\theta^b\theta_1^c$, ce qui donne

$$T = \left| x\,, y \quad ax + \varphi_1(y)\,, \frac{a}{c}y - \frac{b}{c} \right|.$$

Pour que cette substitution soit de l'ordre p, il faut que

$$a \equiv c \equiv 1 \pmod p;$$

mais alors T serait contenu dans I_0, ce qui est absurde. Donc le groupe K ne peut être intransitif.

Si K est transitif, il dérive de deux substitutions échangeables entre elles, S et T, dont l'une fait varier l'indice y; on peut donc supposer

$$S = \theta_0^a \theta_1^b t, \qquad T = \theta_0^c \theta_1^d;$$

mais on trouve

$$S^{-1}TS = t^{-1}Tt = \theta_0^{c-d}\theta_1^d,$$

donc d est égal à zéro. Par conséquent il est permis de faire

$$S = \theta_1^b t, \qquad T = \theta_0.$$

Or I_1 dérive des trois substitutions θ_0', θ_1', t' analogues respectivement à θ_0, θ_1, t, et l'on voit que θ_0', qui est échangeable à θ_1' et à t', ne peut être étrangère à K; en effet, dans ce cas, les p^3 substitutions de I_1 seraient échangeables entre elles, ce qui est absurde. De plus, θ_0' ne peut être une puissance de θ_0, car alors I_1, étant entièrement déterminé par θ_0' et S, se confondrait avec I_0. Donc on peut supposer

$$\theta_0' = \theta_0^a \theta_1^b t, \qquad t' = \theta_0.$$

Ces substitutions déterminent complètement I_1; d'ailleurs, aux p valeurs qu'on peut donner au nombre a répondent p groupes de l'ordre p^3, tous contenant K et contenus dans G; en effet on a

$$\theta_1^{-c}\theta_0'\theta_1^c = \theta_0^{a+c}\theta_1^b t, \qquad \theta_1^{-c} t' \theta_1^c = t' = \theta_0.$$

Il en résulte que le groupe G contient un groupe G_1, dont les substitutions sont permutables à K, et dont l'ordre est égal à

$$p^3 \pi'(p+1),$$

π' étant un diviseur de π. D'autre part, G ne contient d'autres groupes de la même espèce que G_1; c'est ce que nous démontrerons, en faisant

voir qu'on a nécessairement $b = 0$. Pour simplifier les calculs, introduisons, au lieu de x, le nombre

$$\xi = x - b(y)_2.$$

On trouve

$$\theta_0 = t' = |\xi, y \quad \xi + 1, y|, \qquad \theta_1 = |\xi, y \quad \xi + y, y|,$$

$$t = |\xi, y \quad \xi - by, y + 1|, \qquad \theta'_0 = \theta_1^2 t = |\xi, y \quad \xi, y + 1|.$$

La substitution θ'_1 doit être échangeable à θ'_0, en ne faisant pas varier l'indice ξ; elle doit en outre satisfaire à la relation

$$t'^{-1}\theta'_1 t' = \theta'^{-1}_0 . \theta'_1;$$

donc elle aura la forme suivante

$$\theta'_1 = |\xi, y \quad \xi, y + \xi + a|.$$

Ainsi le groupe G_1, contenant les deux substitutions

$$|\xi, y \quad \xi + y, y|, \qquad |\xi, y \quad \xi, y + \xi|,$$

contiendra toute substitution linéaire et homogène par rapport aux indices ξ, y dont le déterminant est congru à 1 (mod p) (voir le *Traité des substitutions* de M. Jordan, n° 121), entre autres celle-ci

$$\left|\xi, y \quad r\xi, \frac{1}{r}y\right| = \left|x, y \quad rx + b\frac{r^2-1}{2r}y - b\frac{r^3-1}{2r^2}y^2, \frac{1}{r}y\right|,$$

où r peut avoir toute valeur non congrue à zéro. Or cette substitution appartient évidemment au groupe H; donc comme nous avons supposé que les substitutions de ce groupe soient contenues dans l'expression

$$|x, y \quad \alpha x + \beta y + \gamma, \delta y + \varepsilon|,$$

il faut qu'on ait $b = 0$, comme nous l'avons annoncé. On a vu en même temps que le groupe H contient toutes les substitutions

$$\left|x, y \quad rx, \frac{1}{r}y\right|;$$

comme d'ailleurs toutes les substitutions de H sont permutables à K, on

a $\pi' = \pi$. L'ordre de G_1 est donc $O' = p^3\pi(p+1)$, celui de G est $O = p^3\pi(n'p^2 + p + 1)$, ou bien, puisque O est divisible par O',

$$O = p^3\pi(p+1)(n''p^2+1).$$

Le résultat final se résume donc comme il suit:

Si $\alpha = 1$, et que G soit de la première espèce, on a ou

$$O = p^3\pi(n'p^2+1),$$

π étant un diviseur de $(p-1)^2$, ou

$$O = p^3(p-1)\pi_1(p+1)(n'p^2+1) = \frac{p^2(p^2-1)(p^2-p)}{\delta}(n'p^2+1),$$

$\pi_1 = \frac{p-1}{\delta}$ étant le nombre des substitutions de la forme $|x, y \quad ax, y|$ contenues dans G. Quand la première formule a lieu, G ne contient d'autres substitutions linéaires que celles de H. En effet, si la substitution linéaire S est étrangère à H et, par suite, non permutable à I_0, le groupe I_1, transformé de I_0 par S, contiendra le groupe (ϑ_0, t), ce qui est contre l'hypothèse, si S appartient à G.

16. Passons au cas où G est de la seconde espèce, α étant égal à 1. D'abord on voit, comme au numéro précédent, qu'un groupe K de l'ordre p^2, contenu dans I_0 et I_1, ne peut être intransitif. Si K était transitif, il serait formé des puissances d'une seule substitution

$$t' = \theta^a\theta_1^b t,$$

mais alors I_0 et I_1, étant complètement déterminés par la substitution t', se confondraient, ce qui est contre l'hypothèse. Ainsi deux des groupes I_r ne peuvent contenir un même groupe d'ordre p^2. Donc

$$O = p^3\pi(n'p^2+1),$$

π étant un diviseur de $p-1$.

17. Dans les cas où $\alpha > 1$, deux quelconques des groupes I_r, par exemple I_0 et I_1, ne peuvent contenir un même groupe transitif dont l'ordre surpasse p^2. En effet ce dernier groupe contiendrait nécessaire-

ment ϑ_0, ϑ_1 et une substitution de la forme $\vartheta_2^{m_2}\vartheta_3^{m_3}\ldots\vartheta_a^{m_a}t$; or ces substitutions déterminent complètement le groupe de l'ordre p^{a+2} qui les contient, de sorte que I_0 et I_1 se confondraient. Donc si I_0 et I_1 contiennent un même groupe K de l'ordre p^{a+1}, celui-ci est intransitif, et par suite il dérive des substitutions $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_a$. Cherchons les substitutions qui sont permutables à K.

Nous désignons par $c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}$ les cycles de ϑ_0, de sorte que c_y soit une substitution qui permute circulairement les éléments dont le second indice est congru à y, et qu'on ait

$$\vartheta_0 = \prod_0^{p-1}{}_y c_y.$$

Si maintenant U désigne une substitution permutable à K, U transformera chaque substitution c_y en une puissance d'une autre, par exemple c_y en $c_{\psi(y)}^{f(y)}$; donc on a

$$U = |\, x, y \quad xf(y) + f_1(y), \psi(y)\,|.$$

Or, comme K est permutable à t, et contient la substitution

$$\vartheta_a = c_a \cdot c_{a+1}^{(a+1)_a} \cdot c_{a+2}^{(a+2)_a} \cdots c_{p-1}^{(p-1)_a},$$

il contient en général la suivante

$$c_z \cdot c_{z+1}^{(a+1)_a} \cdot c_{z+2}^{(a+2)_a} \cdots c_{p-a+z-1}^{(p-1)_a} = S_z.$$

Evidemment K dérive des substitutions $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$; donc pour que U soit permutable à K, il est nécessaire et il suffit que U transforme chacune des substitutions S_z en une substitution T de K, laquelle, comme S_z, est composée de $p - \alpha$ cycles. Les substitutions de K ayant la forme

$$|\, x, y \quad x + F(y), y\,|,$$

où $F(y)$ est une fonction entière de y du degré α, on trouve les substitutions T en déterminant la fonction $F(y)$ de manière qu'elle s'annule pour α valeurs incongrues par rapport au module p. Soit $y_0, y_1, \ldots, y_{a-1}$ ces valeurs; on aura

$$F(y) = M(y - y_0)(y - y_1)\ldots(y - y_{a-1}).$$

M étant une constante, et

$$T = | x, y \quad x + F(y), y | = \Pi c_y^{F(y)}.$$

Comme d'ailleurs K contient toutes ces substitutions, on peut énoncer le critérium de la manière suivante: il faut et il suffit que U transforme les substitutions T les unes dans les autres. Or on a

$$U^{-1}TU = \Pi c_{\psi(y)}^{f(y) \cdot F(y)},$$

donc il faut que

$$f(y) \cdot F(y) \equiv F'[\psi(y)]$$

$$\equiv M'[\psi(y) - \psi(y_0)][\psi(y) - \psi(y_1)] \ldots [\psi(y) - \psi(y_{\alpha-1})] \pmod p,$$

ou bien, en posant $\frac{M'}{M} \equiv N$,

$$(7) \qquad f(y) \equiv N \frac{[\psi(y) - \psi(y_0)][\psi(y) - \psi(y_1)] \ldots [\psi(y) - \psi(y_{\alpha-1})]}{(y - y_0)(y - y_1) \ldots (y - y_{\alpha-1})} \pmod p.$$

Quand $\alpha = p - 1$, cette congruence ne dit rien, puisque on ne peut donner à y d'autre valeur que y_{p-1}, sans annuler le numérateur et le dénominateur. Et, en effet, toute substitution de la forme

$$| x, y \quad xf(y) + f_1(y), \psi(y) |$$

est dans ce cas permutable à K, qui contient toutes les substitutions c_y.

Quand $\alpha = p - 2$, on peut faire $y = y_{p-1}$, et $y = y_{p-2}$; on trouve ainsi, en vertu du théorème de Wilson,

$$\frac{f(y_{p-1})}{y_{p-1} - y_{p-2}} \equiv \frac{N}{\psi(y_{p-1}) - \psi(y_{p-2})}, \qquad \frac{f(y_{p-2})}{y_{p-2} - y_{p-1}} \equiv \frac{N}{\psi(y_{p-2}) - \psi(y_{p-1})},$$

d'où

$$f(y_{p-1}) \equiv f(y_{p-2});$$

comme d'ailleurs y_{p-1} et y_{p-2} sont arbitraires, on conclut que $f(y)$ est constant. Donc si $\alpha = p - 2$, on a

$$U = | x, y \quad ax + f_1(y), \psi(y) |.$$

En effet, K dérive des substitutions $c_y \cdot c_{y+1}^{-1}$, ou bien des $c_y \cdot c_{y_1}^{-1}$, lesquelles par U sont transformées en $c_{\psi(y)}^a \cdot c_{\psi(y_1)}^{-a}$.

Supposons maintenant $\alpha < p - 2$, $\alpha > 0$, et par conséquent $p > 3$. En faisant dans la congruence (7) successivement $y = y_{p-1}$, $y = y_{p-2}$, et divisant les résultats, on a

$$(8) \qquad \frac{f(y_{p-1})}{f(y_{p-2})}$$

$$\equiv \frac{[\psi(y_{p-1}) - \psi(y_0)][\psi(y_{p-1}) - \psi(y_1)] \cdots [\psi(y_{p-1}) - \psi(y_{\alpha-1})]}{[\psi(y_{p-2}) - \psi(y_0)][\psi(y_{p-2}) - \psi(y_1)] \cdots [\psi(y_{p-2}) - \psi(y_{\alpha-1})]} \cdot \frac{(y_{p-2} - y_0)(y_{p-2} - y_1) \cdots (y_{p-2} - y_{\alpha-1})}{(y_{p-1} - y_0)(y_{p-1} - y_1) \cdots (y_{p-1} - y_{\alpha-1})}.$$

Cette congruence, linéaire en y_0 et $\psi(y_0)$, peut être mise sous la forme suivante

$$(9) \qquad \psi(y_0) \equiv \frac{Ay_0 + B}{Cy_0 + D}.$$

Or on peut évidemment remplacer y_0 par chacun des nombres $y_\alpha, y_{\alpha+1}, \ldots, y_{p-3}$, sans autre changement; de plus la congruence (9) est aussi satisfaite en remplaçant y_0 par y_{p-1} ou par y_{p-2}, puisque par là (8) est satisfaite identiquement. Donc on a

$$(10) \qquad \psi(y) \equiv \frac{Ay + B}{Cy + D}$$

pour $y \equiv y_0, y_\alpha, y_{\alpha+1}, \ldots, y_{p-1}$; le nombre de ces valeurs, $p - \alpha + 1$, est au moins égal à 4.

En traitant y_1 comme on a traité y_0, on tire de (8) une nouvelle congruence

$$\psi(y) \equiv \frac{A'y + B'}{C'y + D'}.$$

qui a lieu pour les valeurs suivantes de y:

$$y_1, y_\alpha, y_{\alpha+1}, \ldots, y_{p-1}.$$

Donc on a

$$\frac{Ay + B}{Cy + D} \equiv \frac{A'y + B'}{C'y + D'}$$

pour les valeurs $y_\alpha, y_{\alpha+1}, \ldots, y_{p-1}$, dont le nombre est égal ou supérieur à 3, donc cette congruence est identique, c'est-à-dire que la congruence (10) est satisfaite par $y \equiv y_1$. On démontre de la même manière qu'elle

est satisfaite par $y \equiv y_2, y_3, \ldots, y_{\alpha-1}$. Donc enfin elle est satisfaite par toute valeur de y; comme d'ailleurs $\phi(y)$ ne peut être infini, ni constant, on conclut que

$$C \equiv 0, \qquad \phi(y) \equiv cy + d.$$

En reportant cette valeur dans (8), il vient

$$f(y_{p-1}) \equiv f(y_{p-2});$$

y_{p-1} et y_{p-2} étant arbitraires, cela veut dire que $f(y)$ est une constante. Donc on a

$$U = |\, x, y \quad ax + f_1(y), cy + d \,|.$$

Par ce résultat on est en mesure de traiter en même temps tous les cas où $\alpha > 1$, $\alpha < p - 2$. En effet la substitution U ne peut être de l'ordre p où p^2 que si $a \equiv c \equiv 1 \pmod p$, mais alors U est contenue dans I_0. Par suite ce groupe n'a aucun groupe de l'ordre $p^{\alpha+1}$ en commun avec un autre des groupes I_r. On peut donc conclure que, si $\alpha > 1$, $\alpha < p - 2$, on a

$$O = p^{\alpha+2}\pi(n'p^2 + 1).$$

Quand $p > 3$, $\alpha = p - 2$, on sait que I_0 ne peut avoir qu'un seul groupe K en commun avec d'autres groupes I_r. En désignant par $n_1 p + 1$ le nombre des groupes I_r qui contiennent K, on a

$$O = p^p\pi(n_1 p + 1)(n'p^2 + 1),$$

où $p^p\pi(n_1 p + 1)$ est l'ordre du groupe G_1, formé de celles des substitutions de G qui sont permutables à K. Comme ces substitutions remplacent les éléments d'un même cycle par ceux d'un autre cycle, il existe un groupe G_1' du degré p, isomorphe à G_1, et de l'ordre

$$p\pi_1(n_1 p + 1),$$

π_1 désignant le nombre des valeurs que prend la constante b dans les expressions $|\, x, y \quad ax, by \,|$ ou $\left|\, x, y \quad bx + E\left(\frac{by}{p}\right), by \,\right|$ des substitutions de H'. En effet, les seules substitutions de G_1 qui ne permutent pas les cycles c_y sont les $|\, x, y \quad ax + f_1(y), y \,|$. Parmi les substitutions de G_1, celles qui sont de l'ordre p ou p^2 ont la forme $|\, x, y \quad x + f_1(y), \phi(y) \,|$,

et sont par conséquent échangeables à ϑ_0; donc G_1 contient un groupe G_2 dont les substitutions sont échangeables à ϑ_0, et dont l'ordre est $p^\nu\pi_2(n_1p + 1)$, π_2 désignant le nombre des substitutions de G qui sont de la forme $|x, y \quad x, by|$. Par suite G_1' contient un groupe de l'ordre

$$p\pi_2(n_1p + 1).$$

Particulièrement, si G est de la seconde espèce, on a $\pi_2 = 1$, d'où $n_1 = 0$; donc

$$O = p^\nu\pi(n'p^2 + 1).$$

On verra plus loin qu'on a $n' = 0$ dans tous les cas où $\alpha = p - 2$, $p > 3$.

Si $\alpha = p - 1$, on a

$$O = p^{\nu+1}\pi(n_1p + 1)(n'p^2 + 1),$$

et l'on sait, comme dans le cas précédent, que G contient un groupe non primitif G_1 de l'ordre $p^{\nu+1}\pi(n_1p + 1)$. Il existe bien un groupe G_1' du degré p, isomorphe à G_1; mais comme celui-ci peut contenir des substitutions de la forme $|x, y \quad xf(y) + f_1(y), y|$, qui, quoique étrangères à H, ne déplacent pas les cycles c_y, l'ordre de G_1' n'est pas généralement un multiple de $p(n_1p + 1)$.

§ 4. *Conséquences tirées de la primitivité ou de la non-primitivité des groupes.*

18. Il résulte des travaux de M. Jordan (Journal für Mathematik, Bd. 79, et Bulletin de la Soc. Math., t. 1) que, pour les plus grandes valeurs de α, le groupe G ne peut être primitif, quand il ne contient pas le groupe alterné. En effet, d'après une formule du premier des Mémoires cités (p. 256), le degré n d'un groupe primitif, ne contenant pas le groupe alterné, mais contenant une substitution de l'ordre p à q cycles, doit vérifier l'inégalité

$$n < q(p + q)\log q + \frac{q(p - q)}{2} + p + 3q,$$

où l'on a supposé $q > 2$; si $q = 2$ on a

$$n \leq 2p + 3.$$

et si $q = 1$,

$$n \leqq p + 2.$$

Dans notre cas on a $n = p^2$; comme le groupe contient la substitution ϑ_α, qui est composée de $p - \alpha$ cycles de p lettres, on peut faire $q = p - \alpha$. En supposant $\alpha = p - 1$, on a $q = 1$; donc, ayant $p^2 > p + 2$, le groupe G ne peut être primitif, sans contenir le groupe alterné. En faisant $\alpha = p - 2$, on a $q = 2$; il faudra donc que $p^2 \leqq 2p + 3$, d'où $p = 3$; donc si $\alpha = p - 2$, le groupe ne peut être primitif excepté pour $p = 3$.

Pour les autres valeurs de q, on trouve que le groupe ne peut être primitif, quand on a

$$p > \frac{1}{2} q \log q + \frac{1}{4} q + \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1}{2} q \log q \sqrt{1 + \frac{5}{\log q} - \frac{7}{4(\log q)^2} + \frac{2}{q \log q} + \frac{13}{q(\log q)^2} + \frac{1}{(q \log q)^2}}.$$

Quand $q \geqq 7$, le radical est inférieur à 2, de sorte que l'inégalité précédente peut être remplacée par celle-ci:

$$p > \frac{3}{2} q \log q + \frac{1}{4} q + \frac{1}{2}.$$

En calculant, pour chaque valeur de q, la limite de p, on en déduit celle que α ne peut dépasser, quand le groupe est primitif sans contenir le groupe alterné. Voici les résultats pour les premières valeurs de p.

p	$\lim(\alpha)$	p	$\lim(\alpha)$	p	$\lim(\alpha)$
3	1	13	8	29	20
5	2	17	11	31	22
7	4	19	12	37	27
11	7	23	15	41	30.

Dans le Mémoire inséré au Bulletin de la Société Mathématique M. Jordan a donné, pour les valeurs de q inférieures à 6, une limite plus resserrée, savoir

$$n \leqq pq + q + 1,$$

en supposant $p > q$. On en tire, en faisant $n = p^2$,

$$p = q + 1.$$

Il s'ensuit que, lorsque $p = 5$ et $p = 7$, la vraie limite de α est 1. Ainsi, p étant > 3, G ne peut être primitif quand $\alpha = p - 3$.

Quand par les raisons qui viennent d'être exposées, ou par d'autres, on sait que le groupe G est non-primitif, la distribution des éléments en systèmes est une de celles qu'admet le groupe I_0. En particulier, si $\alpha > 0$, les systèmes sont formés par les éléments qui répondent à une même valeur du second indice.

Les groupes non-primitifs méritent une étude spéciale, non seulement parce que, dans certains cas, ils sont les seuls possibles, mais aussi parce qu'un groupe primitif peut en contenir un autre qui ne l'est pas, et que la connaissance de ce dernier peut être utile à l'étude du premier.

19. Supposons que G soit non-primitif, les éléments se groupant en p systèmes, $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$, où Σ_η contient les éléments pour lesquels le second indice est congru à η. Soit Γ le groupe contenant les substitutions de G qui ne déplacent pas les systèmes, et désignons de plus par γ_η le groupe partiel entre les éléments $u_{0,\eta}, u_{1,\eta}, \ldots, u_{p-1,\eta}$ qu'on obtient par les substitutions de Γ. Tous ces groupes γ_η sont du même ordre, et se déduisent de l'un d'entre eux, en le transformant par les substitutions de G. Nous désignerons l'ordre de γ_η par

$$p\pi_1(mp + 1),$$

π_1 étant le nombre des substitutions de la forme

$$|\, x \quad x\psi(\eta) \,|$$

contenues dans γ_η. Soit enfin γ'_η le groupe dérivé de $|\, x \quad x+1 \,|$ et de ses transformées par les substitutions de Γ; γ'_η sera contenu dans γ_η et permutable à ses substitutions; son ordre sera

$$p\pi'_1(mp + 1),$$

π'_1 étant un diviseur de π_1.

Γ contient la substitution θ_α, qui ne déplace que les éléments des $p - \alpha$ derniers systèmes; mais il ne contient pas de substitution de l'ordre p, qui en déplace moins. Il est même facile de démontrer, qu'aucune substitution de Γ, quel que soit son ordre, laisse immobiles les éléments

de plus de α systèmes. En effet, supposons que la substitution S ne déplace que les éléments de m systèmes, et faisons

$$S = s_a \,.\, s_b \ldots s_f,$$

s_i désignant une substitution entre les éléments du système Σ_i. En transformant S successivement par toutes les substitutions de Γ, on a une série de substitutions:

$$S' = s'_a \,.\, s'_b \ldots s'_f,$$

$$S'' = s''_a \,.\, s''_b \ldots s''_f,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or le groupe qui dérive des s_a, s'_a, s''_a, ..., étant permutable aux substitutions du groupe primitif γ_a, est nécessairement transitif; donc il contient une substitution de l'ordre p, et par suite le groupe γ'_a. En multipliant un certain nombre des substitutions S, S', S'', ..., on peut donc trouver une nouvelle substitution

$$S_1 = \sigma_a \,.\, \sigma_b \ldots \sigma_f,$$

où l'ordre de σ_a est égal à p. En élevant S_1 à une puissance convenable, on a une substitution de l'ordre p, ne déplaçant que les éléments de m systèmes au plus, donc

$$m \geq p - \alpha,$$

ce qui justifie notre assertion.

En faisant $S = \vartheta_a$, le groupe Δ_a dérivant de S, S', S'', ... aura évidemment pour ordre $p\pi'_1(mp + 1)$. Si maintenant $\pi'_1 > 1$, ce groupe contient une substitution φ qui transforme ϑ_a en ϑ_a^r, r étant différent de l'unité. Or, en supposant $\alpha > 0$, Γ contient la substitution

$$\vartheta_{a-1} = c_{a-1} \,.\, c_a^{(a)_{a-1}} \,.\, c_{a+1}^{(a+1)_{a-1}} \ldots c_{p-1}^{(p-1)_{a-1}},$$

et par conséquent celles-ci

$$\varphi^{-1}\vartheta_{a-1}\varphi = c_{a-1} \,.\, c_a^{r(a)_{a-1}} \,.\, c_{a+1}^{r(a+1)_{a-1}} \ldots c_{p-1}^{r(p-1)_{a-1}},$$

$$\varphi^{-1}\vartheta_{a-1}^{-1}\varphi\vartheta_{a-1}^r = c_{a-1}^{r-1},$$

dont la dernière ne déplace que les éléments de $\Sigma_{\alpha-1}$; donc il faut que $\alpha = p - 1$.

Il est donc démontré que pour $\alpha > 0, \alpha < p - 1$, on a nécessairement $\pi'_1 = 1$, et par suite, $m = 0$. Dans tous ces cas Γ ne peut donc contenir d'autres substitutions d'ordre p que les produits des c_i^r, c'est-à-dire les substitutions $\vartheta_0^{r_0}\vartheta_1^{r_1}\ldots\vartheta_\alpha^{r_\alpha}$. Les substitutions de G sont évidemment permutables à Γ, et par suite au groupe $(\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_\alpha)$; or il a été démontré, au numéro 17, que si $\alpha > 0, \alpha < p - 2$, les seules substitutions de cette espèce qui puissent être contenues dans G, sont celles de H. Donc, si le groupe G est non-primitif, α étant > 0 et $< p - 2$, il se confond avec H, et par suite on a

$$O = p^{\alpha+2}\pi.$$

La même chose a encore lieu si $p = 3, \alpha = p - 2 = 1$, comme on le voit aisément.

Quand $p > 3, \alpha = p - 2$, les substitutions de G doivent avoir la forme

$$|\, x, y \quad ax + f(y), \phi(y) \,|;$$

il faut donc que le nombre n' de la formule du numéro 17 soit nul.

Si $\alpha = p - 1$, le groupe Δ_α se confond avec γ'_{p-1}. Le groupe Γ en contient un autre Γ' de l'ordre $[p\pi'_1(mp + 1)]^p$; or Γ ne contient évidemment pas d'autres substitutions de l'ordre p que celles de Γ'; par suite l'ordre de Γ sera

$$p^p\pi_1'^p\pi_1''(mp + 1)^p,$$

ou $\pi'_1\pi''_1 = \pi_1$ est le nombre des substitutions de la forme $|\, x, y \quad ax, y$ contenues dans G. Donc enfin on a

$$O = p^{p+1}\pi_1'^p\pi_1''\pi_2(mp + 1)^p(m_1p + 1).$$

π_2 étant le nombre des valeurs que prend la constante b dans l'expression $|\, x, y \quad ax, by \,|$ des substitutions de H. Chacun des nombres

$$p\pi'_1\pi''_1(mp + 1), \; p\pi'_1(mp + 1), \; p\pi_2(m_1p + 1$$

est l'ordre d'un groupe du degré p.

20. Reprenons maintenant les groupes primitifs où $\alpha > 0, \alpha < p - 3$. Nous désignons par I'_m le groupe intransitif de l'ordre $p^{\alpha+1}$ contenu dans I_m, et par $c_m, c'_m, c''_m, \ldots, c_m^{(p-1)}$ les cycles de la substitution $\vartheta_0^{(m)}$, qui est échangeable à toutes les substitutions de I_m. Ainsi chaque substitution de I'_m est un produit de puissances d'un certain nombre des $c_m^{(i)}$.

Commençons par les groupes de la première espèce, en recherchant si I_0 et I_1 peuvent contenir un même groupe K de l'ordre p^2. Si K était intransitif, il serait contenu dans I'_0 et I'_1. Or nous allons démontrer que, quelle que soit l'espèce de G, les groupes I'_0 et I'_1 ne peuvent avoir de substitution commune.

En effet, une substitution commune à I'_0 et à I'_1 est le produit d'un nombre de cycles au moins égal à $p - \alpha$. Donc parmi les cycles de I'_0 il y a certainement $p - \alpha$ qui se confondent avec $p - \alpha$ cycles de I'_1, et qui seront désignés par

$$c_0^{(\alpha)}, c_0^{(\alpha+1)}, \ldots, c_0^{(p-1)};$$

les lettres de ces cycles forment autant de systèmes communes à I_0 et I_1. D'autre part les systèmes de I_1 ne peuvent pas tous se confondre avec ceux de I_0. En effet, s'il en était ainsi, le groupe qui dérive des substitutions de I_0 et de I_1 serait de l'ordre $p^{\alpha+2}\pi'(mp + 1)$, m étant différent de zéro, et il serait non-primitif, ce qui est impossible (n° 19). On peut donc supposer que le cycle c_0 contienne les lettres

$$a_1, a_2, \ldots, a_p,$$

c_1 celles-ci

$$a_1, a_2, \ldots, a_{p-q}, \qquad b_1, b'_1, \ldots, b_1^{(q-1)},$$

où

$$p - q \geqq 2, \qquad q \geqq 1;$$

car évidemment c_1 contient plus d'une lettre de l'un au moins des systèmes de I_0. Le groupe I'_0 contient une substitution S_0 qui déplace les lettres de $p - \alpha$ systèmes choisis arbitrairement; on peut donc supposer que S_0 déplace $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et les lettres de $p - \alpha - 1$ des cycles $c_0^{(\alpha)}, c_0^{(\alpha+1)}, \ldots, c_0^{(p-1)}$. En désignant généralement par C_m un produit de puissances d'un certain nombre de ces derniers cycles, on a

$$S_0 = c_0 . C_0.$$

De même I'_1 contient une substitution

$$S_1 = c_1 \,.\, C_1.$$

Si maintenant $q > 1$, soit c_1^r la puissance de c_1 qui remplace $b_1^{(q-2)}$ par $b_1^{(q-1)}$; la substitution

$$S'_1 = S_1^{-r} S_0 S_1^r = c_1^{-r} c_0 c_1^r \,.\, C_0$$

ne déplace pas $b_1^{(q-1)}$, mais elle déplace nécessairement une au moins des lettres $b_1, b'_1, \ldots, b_1^{(q-2)}$. Si elle en déplace plus d'une, on déduit de la même manière une nouvelle substitution qui en déplace moins, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une substitution dont le premier cycle contient $p - 1$ des lettres a, par exemple $a_2, a_3, \ldots, a_p$, avec une seule des $b_1^{(i)}$. Par conséquent il est permis de supposer $q = 1$.

Cela posé, soit T une substitution de I'_0 qui, en laissant $a_1, a_2, \ldots, a_p$ immobiles, permute b_1 circulairement avec $p - 1$ autres lettres $b_2, b_3, \ldots, b_p$. En transformant S_1 successivement par les $p - 1$ puissances de T, on obtient les substitutions

$$S_2 = c_2 \,.\, C_1, \qquad S_3 = c_3 \,.\, C_1, \quad \ldots, \quad S_p = c_p \,.\, C_1.$$

où c_i est une substitution circulaire des lettres $a_2, a_3, \ldots, a_p, b_i$. Le groupe $(S_0, S_1, \ldots, S_p)$ permute les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ d'une manière $p + 1$ fois transitive; par conséquent il contient une substitution V qui échange entre eux a_2 et a_3, en laissant $a_1, a_4, \ldots, a_p$ immobiles. Comme nous n'avons fait aucun usage de l'ordre des lettres a, il est permis de supposer

$$S_0 = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_p) C_0,$$

d'où

$$V^{-1} S_0 V = (a_1, a_3, a_2, a_4, \ldots, a_p) C_0.$$

Donc le groupe G contient la substitution $V^{-1} S_0 V \,.\, S_0^{-1}$, qui se réduit à $(a_1 a_2 a_3)$, donc il est non-primitif, symétrique ou alterné. Cela étant contre l'hypothèse, I'_0 et I'_1 n'ont pas de substitution commune.

Le groupe K ne peut donc être intransitif. S'il est transitif, il dérive de deux substitutions échangeables entre elles:

$$\vartheta_0, \qquad \vartheta_1^{m_1} \vartheta_2^{m_2} \ldots \vartheta_\alpha^{m_\alpha} t.$$

Le groupe I_1 contient une substitution ϑ_0' échangeable à toutes les autres; comme il n'existe pas de groupe du degré p^2 et de l'ordre p^3, contenant exclusivement des substitutions échangeables entre elles, ϑ_0' est contenu dans K; donc on peut faire

$$\vartheta_0' = \vartheta_0^{m_0}\vartheta_1^{m_1}\vartheta_2^{m_2}\ldots\vartheta_\alpha^{m_\alpha}t.$$

Le groupe I_1 est complètement déterminé par les substitutions ϑ_0' et $t' = \vartheta_0$. En le transformant par la substitution

$$\theta = \vartheta_1^{a_1}\vartheta_2^{a_2}\ldots\vartheta_\alpha^{a_\alpha},$$

on a un nouveau groupe, déterminé par les substitutions

$$\theta^{-1}\vartheta_0'\theta = \vartheta_0^{m_0+a_1}\vartheta_1^{m_1+a_2}\ldots\vartheta_{\alpha-1}^{m_{\alpha-1}+a_\alpha}\vartheta_\alpha^{m_\alpha}t, \qquad \theta^{-1}t'\theta = \vartheta_0.$$

Parmi les groupes qu'on obtient de cette manière, ceux qui répondent à une même combinaison de valeurs de $a_2, a_3, \ldots, a_\alpha$ ont en commun avec I_0 un même groupe d'ordre p^2. Le nombre de ces derniers groupes est $hp^{\alpha-1}$, et le nombre des groupes $I_1, I_2, \ldots$ qui les contiennent est hp^α, h étant le nombre des valeurs que peut avoir m_α. Pour le déterminer, supposons que I_1 soit défini par les substitutions

$$\vartheta_0' = \vartheta_\alpha^{m_\alpha}t = |\, x, y \quad x + m_\alpha(y)_\alpha, y + 1 \,|, \qquad t' = |\, x, y \quad x + 1, y \,|,$$

et faisons

$$\xi = x - m_\alpha(y)_{\alpha+1};$$

on trouve

$$\vartheta_r = |\, \xi, y \quad \xi + (y)_r, y \,|, \qquad t = |\, \xi, y \quad \xi - m_\alpha(y)_\alpha, y + 1 \,|,$$

$$\vartheta_0' = |\, \xi, y \quad \xi, y + 1 \,|, \qquad t' = |\, \xi, y \quad \xi + 1, y \,|.$$

Comme nous supposons $\alpha > 0$, les groupes I_0 et I_1 contiennent respectivement les deux substitutions

$$|\, \xi, y \quad \xi + y, y \,|, \qquad |\, \xi, y \quad \xi, y + \xi \,|,$$

donc G, contenant les deux, contient toutes les substitutions linéaires et

homogènes en ξ et y dont les déterminants sont congrus à $1 \pmod p$, entre autres la suivante

$$\left| \xi, y \quad r\xi, \frac{1}{r} y \right| \quad \text{ou} \quad \left| x, y \quad rx - m_\alpha \left\{ r(y)_{\alpha+1} - \left(\frac{y}{r}\right)_{\alpha+1} \right\}, \frac{1}{r} y \right|.$$

Or, cette substitution, étant permutable à I_0, appartient à H, donc le coefficient de $y^{\alpha+1}$ dans le développement de $m_\alpha \left\{ r(y)_{\alpha+1} - \left(\frac{y}{r}\right)_{\alpha+1} \right\}$, à savoir

$$\frac{m_\alpha(r^{\alpha+2} - 1)}{r^{\alpha+1}.2.3\ldots(\alpha+1)},$$

est divisible par p; comme r peut avoir toute valeur non congrue à zéro, on doit avoir $m_\alpha \equiv 0 \pmod p$, à moins que α ne soit égal à $p-3$.

Comme nous supposons $\alpha < p - 3$, nous avons donc $h = 0$ ou $h = 1$, et dans le dernier cas nous savons que G contient les $p - 1$ substitutions $\left| x, y \quad rx, \frac{1}{r} y \right|$ et généralement toute substitution de la forme

$$\left| \begin{matrix} x & ax + by + c \\ y & dx + ey + f \end{matrix} \right|$$

où $ae - bd \equi 1 \pmod p$; ces substitutions forment un groupe d'ordre $p^3(p^2 - 1)$.

On a vu, au commencement du numéro 17, que deux des groupes I ne peuvent contenir un même groupe transitif dont le degré surpasse p^2. En vertu de ce qui a été dit au numéro 6, on peut donc préciser comme il suit l'expression de l'ordre de G:

Quand $\alpha > 0$, $\alpha < p - 3$, et G est de la première espèce, son ordre est exprimé par l'une des formules suivantes:

$$O = p^{\alpha+2}\pi(n'p^{\alpha+1} + 1),$$

$$O = p^{\alpha+2}\pi(n'p^{\alpha+1} + p^\alpha + 1).$$

Dans le cas de la première formule, G ne contient d'autres substitutions linéaires que celles de H; c'est ce qu'on voit de la même manière que pour $\alpha = 1$ (n° 15). Dans la seconde formule le nombre $n'p^{\alpha+1} + p^\alpha + 1$ est divisible par $p + 1$; en effet, on voit facilement que le nombre des

groupes d'ordre p^2, contenus chacun dans $p + 1$ des groupes I_r, est égal à $\frac{(n'p^{\alpha+1} + p^{\alpha} + 1)p^{\alpha-1}}{p+1}$.

Quand G est de la seconde espèce, deux quelconques des groupes I_r ne peuvent avoir d'autre substitution commune que l'identique; car s'ils en avaient, ils contiendraient une même substitution de l'ordre p, laquelle appartiendrait à I'_0 et à I'_1; mais on a vu, au commencement de ce numéro, que cela est impossible. Donc si G est de la seconde espèce, α étant > 1, et $< p - 3$, on a comme pour $\alpha = 1$,

$$O = p^{\alpha+2}\pi(n'p^{\alpha+2} + 1).$$

§ 5.

21. Recherchons de quelle manière un groupe primitif du degré p^2 peut être composé. Nous désignerons par H le groupe que nous avons plus haut appelé H', en gardant du reste les notations précédentes. Le groupe primitif dont il est question dérive des substitutions des groupes $I_0, I_1, \ldots, I_{np}$ et H, ce que nous exprimerons en écrivant

$$G = (I_0, I_1, \ldots, I_{np}, H);$$

son ordre est

$$O = p^{\alpha+2}\pi(np + 1).$$

Supposons que G contienne un groupe G', permutable à ses substitutions et, par suite, transitif. Dénotons les groupes contenus dans G', ainsi que leurs ordres, en accentuant les lettres relatives aux groupes correspondants contenus dans G; on a

$$G' = (I'_0, I'_1, \ldots, I'_{n'p}, H'),$$

$$O' = p^{\alpha'+2}\pi'(n'p + 1).$$

On sait que chacun des groupes I'_r est contenu dans un des I_r; nous allons démontrer que I'_r est permutable aux substitutions de chaque groupe I_r qui le contient. En transformant les I'_r successivement par toutes les substitutions de I_0, on obtient un groupe entre les I'_r, dont l'ordre est une puissance de p; comme leur nombre est $n'p + 1$, l'un

au moins d'entre eux, par exemple I'_0, est invariable par ces transformations. Par conséquent I'_0 est contenu dans I_0, car autrement le groupe (I_0, I'_0) serait de l'ordre $p^{\alpha+2+m}$, ce qui est absurde. De plus on a $\alpha = \alpha'$ ou $\alpha = \alpha' + 1$; en effet, si $\alpha > \alpha' + 1$, on aurait

$$I'_0 = (\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{\alpha'}, \vartheta^a_{\alpha'+1}\vartheta^b_{\alpha'+2} \ldots \vartheta^f_{\alpha-1}\vartheta^g_\alpha t);$$

en transformant ce groupe par ϑ_α, on aurait le suivant

$$(\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{\alpha'}, \vartheta^a_{\alpha'+1}\vartheta^b_{\alpha'+2} \ldots \vartheta^{f+1}_{\alpha-1}\vartheta^g_\alpha t),$$

qui diffère de I'_0, ce qui est impossible. Il faut donc que $\alpha = \alpha'$ ou $\alpha = \alpha' + 1$, et dans les deux cas I'_0 est évidemment permutable aux substitutions de chacun des groupes I_r qui le contient.

Premier cas, $\alpha = \alpha'$. Comme I'_r est identique au groupe I_r qui le contient, on a évidemment $n' = n$,

$$O' = p^{\alpha+2}\pi'(np + 1).$$

Le groupe H' est contenu dans H et permutable à ses substitutions, car le groupe transformé de H' par une substitution de H est contenu dans H et G', et par conséquent il ne peut être que H'.

Inversement, si G', ayant pour ordre $p^{\alpha+2}\pi'(np + 1)$, est contenu dans G, et si, en outre, H' est permutable aux substitutions de H, G' est permutable à celles de G; c'est ce qu'on voit presque immédiatement en remarquant qu'on a $G = (G', H)$. Si l'on excepte les groupes de la première espèce où $\alpha = 0$, la condition relative au groupe H' peut être omise, puisque les substitutions de H sont échangeables entre elles. D'ailleurs, si G' n'est pas nécessairement permutable aux substitutions de G, le groupe $(I'_0, I'_1, \ldots, I'_{np})$, contenu dans G', l'est toujours.

Les facteurs de composition de G sont donc: 1°, les facteurs de composition du groupe $\frac{G}{G'}$, 2°, ceux de G' (voir, pour la notation, le Mémoire de M. Jordan: *Sur la limite de transitivité*, § 2, Bulletin de la Société Mathématique, t. **1**). Si l'on excepte le cas où, α étant égal à zéro, H est icosaédrique, les facteurs qui naissent du groupe $\frac{G}{G'}$ sont des nombres premiers. Quand H est icosaédrique, H' peut l'être aussi, et dans ce cas les facteurs de composition qui précèdent ceux de G'

sont encore des nombres premiers; si non, H' ne contient que des substitutions de la forme $|x, y \quad ax, ay|$.

Second cas, $\alpha = \alpha' + 1$. Chacun des groupes I_r ne peut contenir qu'un seul des groupes I'_r. En effet si I'_0 et I'_1 étaient contenus dans I_0, on aurait

$$I'_0 = (\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{\alpha-1}, \vartheta_\alpha^m t),$$

$$I'_1 = (\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{\alpha-1}, \vartheta_\alpha^{m'} t);$$

donc G' contiendrait $\vartheta_\alpha^m t$ et $\vartheta_\alpha^{m'} t$, et par suite $\vartheta_\alpha^{m-m'}$, ce qui est contre l'hypothèse. Or, on a vu que deux des groupes I_r ne peuvent contenir un même groupe transitif de l'ordre $p^{\alpha+1}$ que dans le seul cas où $\alpha = 1$, G est de la première espèce et où l'on a

$$O = p^3\pi(p+1)(n_1p^2+1).$$

Donc, si l'on fait abstraction de ce cas, il faut que $n = n'$,

$$O' = p^{\alpha+1}\pi'(np+1).$$

Comme G' est permutable aux substitutions de I_0, le groupe G en contient un autre G'' de l'ordre $p^{\alpha+2}\pi'(np+1)$; d'après ce qui précède G'' est permutable aux substitutions de G, et évidemment G' est permutable à celles de G''; donc les facteurs de composition de G sont: 1°, les diviseurs premiers de $\frac{\pi}{\pi'}$, 2°, le nombre p, 3°, les facteurs de composition de G'.

Si le groupe G' est lui-même composé, la série des décompositions est arrêtée, au plus tard, quand on est parvenu à un groupe de l'ordre $p^2\pi_r(np+1)$, où π_r est un nombre premier. En effet on ne rencontrera pas le cas qui a été excepté, comme le font voir les expressions de O trouvées au numéro précédent. Donc, à part l'exception signalée, le nombre n a la propriété de se conserver dans le cours des décompositions. Un groupe dont l'ordre est exprimé par la formule

$$O = p^{\alpha+2}\pi(n'p^{\alpha+1} + p^\alpha + 1),$$

α étant supérieur à 1, n'entre jamais dans ce cas. On aurait en effet $O' = p^{\alpha+1}\pi'(n'p^{\alpha+1} + p^\alpha + 1)$, et par conséquent G' ne contiendrait d'autres

substitutions linéaires que celles de H'; mais d'autre côté il contiendrait nécessairement la substitution $|x, y \quad x, y+x|$ (n° 20), ce qui est une contradiction.

Considérons enfin le cas d'exception. On a

$$O = p^3\pi(p+1)(n_1p^2+1), \qquad O' = p^2\pi'(n'p+1).$$

Désignons par Γ le groupe d'ordre $p^3\pi(p+1)$ formé des substitutions linéaires de G, et soient $I_0, I_1, \ldots, I_p$ les groupes d'ordre p^3 contenus dans Γ. On a vu que l'un des groupes $I'_0, I'_1, \ldots, I'_{n'p}$ est contenu dans I_0, et que, par suite, il a la forme $(\vartheta_0, \vartheta_1^m t)$; donc G' contient la substitution ϑ_0. Dans un autre des groupes I_r les substitutions échangeables à toutes les autres sont les t^m; on peut donc conclure que G' contient t. Donc parmi les groupes I'_r se trouve le suivant: $(\vartheta_0, t) = I'_0$, qui est contenu dans les $p+1$ groupes $I_0, I_1, \ldots, I_p$. D'autre part I'_0, étant permutable aux substitutions de tout groupe I_r qui le contient, ne peut être contenu dans aucun des groupes $I_{p+1} \ldots I_{np}$. Il s'ensuit que chacun des I'_r est contenu dans $p+1$ des I_r. Donc on a

$$O' = p^2\pi'(n_1p^2+1).$$

Quand $p = 3$, il n'existe d'autres groupes du genre que nous considérons, que ceux où $n_1 = 0$, c'est-à-dire ceux qui sont contenus dans le groupe linéaire. Pour les autres valeurs de p, le groupe Δ qui renferme les substitutions linéaires et homogènes dont le déterminant est congru à $1 \pmod p$, et qui est contenu dans G, a pour facteurs de composition $\frac{p(p^2-1)}{2}$ et 2. Les substitutions de Δ sont permutables à I'_0 et par suite à H'. On en peut conclure que H' ne contient que des substitutions de la forme $|x, y \quad ax, ay|$. En effet toute substitution de H' peut être écrite sous la forme ST, où S appartient à Δ, et où T a la forme $|x, y \quad ax, y|$. Or comme Δ contient la substitution

$$\varphi = \left| x, y \quad rx, \frac{1}{r}y \right|,$$

H' contiendra $\varphi^{-1}S\varphi T$ et par suite $\varphi^{-1}S\varphi \,.\, S^{-1}$; cette substitution, faisant partie d'un groupe contenu dans Δ et permutable à ses substitutions, ne peut être que 1 ou $|x, y \quad -x, -y|$. Mais la dernière alternative

ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs de r, comme on le voit aisément; pour les autres il faut donc que $\varphi^{-1}S\varphi = S$; mais alors S est canonique en x et y, donc

$$S = \left| x , y \quad ax , \frac{1}{a} y \right| .$$

Par conséquent les substitutions de H' sont de la forme

$$U = | x , y \quad ax , by | ;$$

mais, puisque J contient la substitution ϑ_1, H' contient la suivante

$$\vartheta_1^{-1} U \vartheta_1 \,.\, U^{-1} = \left| x , y \quad x + \frac{b-a}{a} y , y \right| .$$

ce qui exige que $b \equiv a \pmod{p}$.

Les premiers groupes composants de G sont ceux de $\frac{G}{G'}$; or ce groupe est isomorphe au groupe contenant les substitutions linéaires et homogènes de G. Donc, si l'on suppose que H contienne des substitutions dont le déterminant est non résidu quadratique de p, et qu'on désigne par $\pi'\pi''$ le nombre des substitutions de H qui ont la forme $| x , y \quad ax , ay |$ les facteurs de composition de G seront: 2, $\frac{p(p^2-1)}{2}$, les facteurs premiers de π'', les facteurs de composition de G', et l'on aura

$$\pi = 2\pi'\pi''(p-1).$$

Si au contraire H ne contient que des substitutions dont les déterminants sont résidus, le premier facteur (2) doit être omis, et l'on aura $\pi = \pi'\pi''(p-1)$. Le nombre n n'a pas ici la propriété d'être conservé en passant du groupe G au groupe G'; mais cette propriété appartient toujours au nombre N, défini par l'équation

$$O = p^m P(Np + 1),$$

P désignant l'ordre du groupe formé de celles des substitutions de G qui sont linéaires en x et y ou en $\xi \pmod{p^2}$, suivant l'espèce du groupe.

22. Voici une autre conséquence de ce qui précède, qui sans avoir beaucoup d'importance, présentera peut-être quelque intérêt, vu qu'on ne

connaît qu'un très petit nombre de cas où l'on peut reconnaître la résolubilité d'un groupe de son ordre seul:

Tout groupe dont l'ordre est p^2q ou p^2q^2, p et q étant des nombres premiers inégaux, est résoluble.

Soit G un groupe de l'ordre p^2q; il en contient un autre H, de l'ordre q. Désignons par y_0 une fonction rationnelle des éléments, invariable par les substitutions de H, mais variable par toute autre substitution; cette fonction prend, par les substitutions de G, un nombre p^2 de valeurs différentes, $y_0, y_1, \ldots, y_{p^2-1}$. En opérant dans ces fonctions les substitutions de G, on a un groupe G' entre les y, lequel est transitif et isomorphe à G. L'ordre de G' est p^2 ou p^2q. Dans le premier cas H est permutable aux substitutions de G; comme les facteurs de composition de G' sont p, p, ceux de G sont p, p, q. Si l'ordre de G' est p^2q, ce groupe en contient un autre I' de l'ordre p^2; en désignant par $p^2\pi$ l'ordre du groupe qui contient les substitutions de G' permutables à I', on a une équation de la forme

$$p^2q = p^2\pi(np + 1).$$

Or, on ne peut avoir $\pi = 1$, puisque alors n serait nul, donc il faut que $\pi = q, n = 0$; c'est-à-dire que les substitutions de G' sont toutes permutables à I'; par conséquent les facteurs de composition de G' qui sont en même temps ceux de G, sont q, p, p. Dans les deux cas G est donc résoluble.

Si l'ordre de G est p^2q^2, on obtient comme plus haut un groupe G' du degré p^2 isomorphe à G; son ordre est p^2, p^2q ou p^2q^2. Dans les deux premiers cas G' est résoluble, et par suite aussi G. Dans le troisième on a, comme ci-dessus, une équation de la forme

$$p^2q^2 = p^2\pi(np + 1),$$

et l'on peut supposer $q > p$. Or on ne peut avoir $\pi = 1$, donc il faudrait que q divisât π; mais π est un diviseur de $(p - 1)^2(p + 1)$, nombre dont aucun diviseur premier ne surpasse p, à moins que p ne soit égal à 2. Mais cette supposition est inadmissible, puisque l'ordre d'un groupe du quatrième degré est un diviseur de 24. Ainsi le troisième cas peut être évité. Le théorème est donc démontré.

22. La détermination du groupe que nous avons désigné par H permet de resserrer un peu, dans quelques cas spéciaux, la limite de transitivité des groupes, assignée par M. JORDAN dans son Mémoire sur ce sujet, inséré au Bulletin de la Société Mathématique, t. **1**. En effet, si dans le théorème III du Mémoire cité, on fait $m = 2$, $n = 0$, on démontre, en suivant le raisonnement de M. JORDAN, que si un groupe du degré $p^2q + k$, où $q < p$, $q < k$, est plus de k fois transitif sans contenir le groupe alterné, k ne pourra surpasser 5, si le nombre premier p est de l'une des formes $10h \pm 1$; il ne pourra surpasser 4, si p est égal à 5 ou qu'il soit de l'une des formes $10h \pm 3$. Les mêmes règles sont encore valables, quand le degré est $pq + k$, où $q < k$, $q < p^2$. Si l'on fait $q = 1$, et qu'on suppose en même temps que l'ordre du groupe partiel qui laisse $k + 1$ éléments immobiles, soit divisible par p, k ne peut même dépasser 2. C'est là une proposition analogue à l'élégant théorème I du Mémoire de M. JORDAN, et elle se démontre de la même manière.

SUR UN MODE DE TRANSFORMATION DES SURFACES MINIMA.

(Second Mémoire)

PAR

E. GOURSAT
À PARIS.

1. Le problème traité dans le travail précédent [1] conduit à examiner une question plus générale. Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = f(x, y, z; x_0, y_0, z_0), \\ y_1 = \varphi(x, y, z; x_0, y_0, z_0), \\ z_1 = \psi(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

trois fonctions de six variables indépendantes x, y, z, x_0, y_0, z_0. Supposons que x, y, z désignent les coordonnées d'un point d'une surface minima *quelconque* S, et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point correspondant de la surface adjointe S_0. Le point de coordonnées x_1, y_1, z_1 décrira une certaine surface S_1. *Quelles sont les fonctions f, φ, ψ les plus générales, telles que la surface S_1 soit aussi une surface minima, quelle que soit la surface minima S?*

On a vu dans le travail précédent qu'on peut satisfaire à cette condition en prenant pour f, φ, ψ des fonctions linéaires convenablement choisies de x, y, z, x_0, y_0, z_0. Les propriétés connues des surfaces minima conduisent sans difficulté à la forme générale des fonctions f, φ, ψ.

2. Soit m un point quelconque de l'espace de coordonnées a, b, c, m_0 un autre point de coordonnées a_0, b_0, c_0, P et P_0 deux plans paral-

[1] Voir Acta mathematica, t. **11**, p. 135.

lèles passant par ces deux points, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à ce plan. Considérons une surface minima S passant au point m et tangente en ce point au plan P; comme on peut déplacer la surface adjointe S_0 parallèlement à elle-même, nous pouvons supposer que le point correspondant à m sur S_0 est précisément le point m_0. Les formules (1) feront correspondre au point m un point m_1 dont les coordonnées a_1, b_1, c_1 ne dépendront que des coordonnées des deux points m et m_0. Des formules (1) on déduit

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial f}{\partial z_0}dz_0, \\ dy_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}dz_0, \\ dz_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial z}dz + \frac{\partial \psi}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial \psi}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial \psi}{\partial z_0}dz_0; \end{aligned}\right.$$

or on a [1]

$$dx_0 = \beta dz - \gamma dy, \qquad dy_0 = \gamma dx - \alpha dz, \qquad dz_0 = \alpha dy - \beta dx,$$

et, si on remplace dx_0, dy_0, dz_0 dans les formules précédentes, on voit que les cosinus directeurs de la normale à la surface décrite par le point x_1, y_1, z_1 ne dépendent que de $x, y, z, x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$. Par conséquent, si l'on considère toutes les surfaces minima S tangentes à un plan P en un point déterminé m, telles que le point correspondant au point m sur la surface adjointe S_0 soit un point déterminé m_0, toutes les surfaces S_1 définies par les formules (1) sont tangentes à un plan déterminé P_1 en un point fixe m_1.

Cela posé, soit Γ une courbe minima quelconque représentée par les équations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} X &= A(t), \\ Y &= B(t), \\ Z &= C(t), \end{aligned}\right.$$

[1] Schwarz, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* (Journal für Mathematik, t. **80**, p. 280; 1875).

où $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ désignent trois fonctions d'une même variable t vérifiant la relation

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0;$$

soit Γ_0 une seconde courbe minima représentée par les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} X_0 = iA(t) + \lambda, \\ Y_0 = iB(t) + \mu, \\ Z_0 = iC(t) + \nu, \end{cases}$$

où λ, μ, ν sont trois constantes quelconques. Par la courbe Γ faisons passer une surface minima quelconque S et soit Δ la développable circonscrite à S le long de Γ; cette développable se réduit, comme on sait, à un cône ayant son sommet en un point du cercle de l'infini. La surface adjointe S_0 n'est pas complètement définie de position; on peut la transporter parallèlement à elle-même ou la remplacer par sa symétrique relativement à un point de l'espace. On reconnaît aisément qu'on peut, sans restreindre la généralité, la faire passer par la courbe Γ_0, de façon que les points des deux courbes Γ, Γ_0, qui correspondent à une même valeur de t, se correspondent aussi sur les surfaces S, S_0.

A la surface S les formules (1) font correspondre une surface S_1 qui, par hypothèse, doit être une surface minima. A la courbe Γ, ces formules font correspondre une certaine courbe C représentée par les équations

$$(5) \quad \begin{cases} X_1 = f[A(t), B(t), C(t); iA(t)+\lambda, iB(t)+\mu, iC(t)+\nu] = F(X, Y, Z), \\ Y_1 = \varphi[A(t), B(t), C(t); iA(t)+\lambda, iB(t)+\mu, iC(t)+\nu] = \Phi(X, Y, Z), \\ Z_1 = \psi[A(t), B(t), C(t); iA(t)+\lambda, iB(t)+\mu, iC(t)+\nu] = \Psi(X, Y, Z); \end{cases}$$

soit Δ_1 la développable circonscrite à S_1 le long de la courbe C. La courbe C et la développable Δ_1 resteront les mêmes, on vient de le voir, si les courbes Γ, Γ_0 et la développable Δ restent les mêmes. Or il existe une infinité de surfaces minima S inscrites dans la développable Δ le long de la courbe C, et on peut toujours supposer que les surfaces adjointes passent par la courbe Γ_0. On voit donc qu'il doit exister une infinité de surfaces minima S_1 inscrites dans la développable

Δ_1 le long de la courbe C. Or cela ne peut avoir lieu que si cette courbe C est elle-même une courbe minima.[1] Si on remarque maintenant qu'on peut répéter le raisonnement qui précède en partant d'une surface minima quelconque et d'une courbe minima quelconque située sur cette surface, on est conduit aux conclusions suivantes. Si les formules (1) font correspondre à une surface minima quelconque S une nouvelle surface minima S_1;

1° *toute courbe minima Γ de S a pour transformée une courbe minima Γ_1 de S_1; 2° on peut déduire la courbe Γ_1 de la courbe Γ par des formules de transformation* (5), *qui font correspondre un point à un point et qui changent toute courbe minima en une nouvelle courbe minima.*

3. D'après cela, voici comment on obtiendra la transformation la plus générale satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Soit S une surface minima quelconque, S_1 une surface minima qui lui correspond par une transformation de cette nature. La surface S peut être considérée comme le lieu du milieu d'une corde joignant un point d'une courbe minima Γ à un point d'une autre courbe minima Γ'. La surface S_1 peut être engendrée de la même façon au moyen de deux courbes minima Γ_1, Γ_1'. Soit γ une courbe minima de S homothétique à Γ et γ_1 la courbe minima qui lui correspond sur S_1; cette courbe γ_1 sera homothétique à l'une des courbes Γ_1, Γ_1', à la courbe Γ_1 par exemple. Il résulte alors de ce qui précède que l'on pourra passer de la courbe Γ à la courbe Γ_1 au moyen d'une transformation qui fait correspondre un point à un point et à toute courbe minima une nouvelle courbe minima. La courbe Γ_1' se déduira de Γ' par une transformation de même nature.

Prenons, par conséquent, deux courbes minima quelconques Γ, Γ', représentées par les équations

$$\Gamma \begin{cases} X = A(t), \\ Y = B(t), \\ Z = C(t), \end{cases} \qquad \Gamma' \begin{cases} X' = A'(\tau), \\ Y' = B'(\tau), \\ Z' = C'(\tau), \end{cases}$$

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. **1**, p. 396.

et soient S, S_0 les deux surfaces minima, adjointes l'une de l'autre, données par les équations

$$S \begin{cases} 2x = A(t) + A'(\tau), \\ 2y = B(t) + B'(\tau), \\ 2z = C(t) + C'(\tau), \end{cases}$$

$$S_0 \begin{cases} 2x_0 = i[A(t) - A'(\tau)], \\ 2y_0 = i[B(t) - B'(\tau)], \\ 2z_0 = i[C(t) - C'(\tau)], \end{cases}$$

d'où l'on tire inversement

$$\begin{aligned} A(t) &= x - ix_0, & A'(\tau) &= x + ix_0, \\ B(t) &= y - iy_0, & B'(\tau) &= y + iy_0, \\ C(t) &= z - iz_0, & C'(\tau) &= z + iz_0. \end{aligned}$$

Appliquons à chacune des courbes Γ, Γ' une de ces transformations dont il vient d'être question, qui font correspondre un point à un point et qui changent les courbes minima en courbes minima. On obtient deux autres courbes minima Γ_1, Γ'_1:

$$\Gamma_1 \begin{cases} X_1 = F[A(t), B(t), C(t)], \\ Y_1 = \Phi[A(t), B(t), C(t)], \\ Z_1 = \Psi[A(t), B(t), C(t)], \end{cases}$$

$$\Gamma'_1 \begin{cases} X'_1 = F'[A'(\tau), B'(\tau), C'(\tau)], \\ Y'_1 = \Phi'[A'(\tau), B'(\tau), C'(\tau)], \\ Z'_1 = \Psi'[A'(\tau), B'(\tau), C'(\tau)], \end{cases}$$

et une surface minima S_1

$$S_1 \begin{cases} 2x_1 = X_1 + X'_1, \\ 2y_1 = Y_1 + Y'_1, \\ 2z_1 = Z_1 + Z'_1. \end{cases}$$

Si on remplace dans ces formules $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$; $A'(\tau)$, $B'(\tau)$, $C'(\tau)$ par leurs valeurs en fonction de x, y, z; x_0, y_0, z_0 et si on divise par 2 les coordonnées x_1, y_1, z_1, on aboutit aux formules suivantes pour représenter la surface S_1

$$(6)\quad \begin{cases} x_1 = F[x - ix_0, y - iy_0, z - iz_0] + F'[x + ix_0, y + iy_0, z + iz_0], \\ y_1 = \Phi[x - ix_0, y - iy_0, z - iz_0] + \Phi'[x + ix_0, y + iy_0, z + iz_0], \\ z_1 = \Psi[x - ix_0, y - iy_0, z - iz_0] + \Psi'[x + ix_0, y + iy_0, z + iz_0]. \end{cases}$$

Ces formules sont bien de la forme (1) et, d'après ce qu'on vient de voir, ce sont les plus générales qui satisfassent aux conditions du problème proposé.

4. Nous sommes donc amenés à rechercher les transformations de l'espace qui font correspondre un point à un point et qui changent toute courbe minima en une nouvelle courbe minima. Soient

$$(7)\quad \begin{cases} X_1 = F(X, Y, Z), \\ Y_1 = \Phi(X, Y, Z), \\ Z_1 = \Psi(X, Y, Z) \end{cases}$$

les formules qui définissent une transformation de cette espèce; la somme $dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2$ est égale à une forme quadratique homogène de dX, dY, dZ dont les coefficients ne dépendent que de X, Y, Z. Mais, puisqu'on doit avoir

$$dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = 0$$

toutes les fois que l'on a

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0,$$

il faut évidemment que l'on ait identiquement

$$(8)\quad dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = \lambda(dX^2 + dY^2 + dZ^2),$$

λ ne dépendant que de X, Y, Z. On connaît toutes les transforma-

tions de la forme (7) qui satisfont à cette condition.[1] Elles résultent de la combinaison de transformations par rayons vecteurs réciproques avec un déplacement, et dépendent de dix paramètres arbitraires. Ces transformations peuvent être définies d'une manière élégante, si l'on emploie les coordonnées pentasphériques; elles résultent alors d'une substitution orthogonale à cinq variables effectuée sur ces coordonnées. Il n'y a aucune difficulté à déduire de là l'expression générale des fonctions $F, F', \Phi, \Phi', \Psi, \Psi'$ qui figurent dans les formules (6) et par suite des fonctions f, φ, ψ des formules (1). Il est à remarquer que, si la surface primitive S est réelle, les formules (1) donneront une infinité de nouvelles surfaces qui seront toutes réelles, pourvu qu'on applique aux deux courbes Γ, Γ' des transformations imaginaires conjuguées.

5. Supposons que les transformations appliquées aux deux courbes minima Γ, Γ' se réduisent à une inversion par rapport à une sphère de rayon R ayant pour centre l'origine des coordonnées. Les formules (7) deviennent ici

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{R^2X}{X^2+Y^2+Z^2}, \\ Y_1 &= \frac{R^2Y}{X^2+Y^2+Z^2}, \\ Z_1 &= \frac{R^2Z}{X^2+Y^2+Z^2}; \end{aligned}\right.$$

et les formules (6) nous donnent

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= Ux + Vx_0, \\ y_1 &= Uy + Vy_0, \\ z_1 &= Uz + Vz_0, \end{aligned}\right.$$

[1] Liouville, *Journal de Mathématiques pures et appliquées.* 1ère série, t. **13**, p. 220 et t. **15**, p. 103.

Darboux, *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux.* Annales de l'École Normale, t. **7**; 1878.

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(11)\quad \begin{cases} U = \dfrac{R^2(x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2)}{(x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2)^2 + 4(xx_0 + yy_0 + zz_0)^2}, \\[2ex] V = \dfrac{2R^2(xx_0 + yy_0 + zz_c)}{(x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2)^2 + 4(xx_0 + yy_0 + zz_0)^2}. \end{cases}$$

Ces formules mettent en évidence la propriété suivante: les trois points de coordonnées (x, y, z), (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) sont dans un même plan passant par l'origine. La transformation qui précède a déjà été employée par M. Lie.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE NORMEN KOMPLEXER ZAHLEN

VON

K. SCHWERING

in COESFELD.

Wenn $\alpha^\lambda = 1$, λ Primzahl und α nicht reell ist, so heisst der Ausdruck

$$a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

wo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{\lambda-1}$ reelle ganze Zahlen bedeuten, *eine aus λ^{ten} Einheitswurzeln gebildete komplexe Zahl.* Unter der *Norm* einer solchen komplexen Zahl versteht man das Produkt

$$\prod_r (a_1\alpha^r + a_2\alpha^{2r} + a_3\alpha^{3r} + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{r(\lambda-1)}). \qquad (r=1, 2, 3, \ldots, \lambda-1)$$

Die Berechnung einer solchen Norm ist bei zahlentheoretischen Untersuchungen insofern eine Sache von grundlegender Bedeutung, als die Norm allein Auskunft über die wesentlichen Eigenschaften einer komplexen Zahl geben kann. Es war daher unbedingt geboten, in erheblichem Umfange Normenberechnungen durchzuführen und die Ergebnisse in Tafeln zusammen zu stellen. Solche Tafeln hat Herr C. G. Reuschle mit grosser Sorgfalt berechnet, und die Akademie der Wissenschaften in Berlin hat den Druck auf ihre Kosten herstellen lassen. Ist hiermit dem praktischen Bedürfnisse abgeholfen, so bleibt gleichwohl für die Theorie die ebenso interessante als schwierige Aufgabe zu lösen, den wirklichen Ausdruck der Norm näher zu untersuchen. Schon Herr Reuschle selbst hat in dieser Richtung Wege gezeigt. In einer kleinen Gelegenheitsschrift *Entwicklung von Produkten konjugirter Faktoren*, Stuttgart 1874. finden sich beachtenswerte Angaben über die Bildung der Norm. Insbesondere bildet er die von ihm sogenannte *kubische Normform* und ver-

wendet sie für Primzahlen des ersten Tausend. Wenn nun meine eigenen Untersuchungen einen ganz anderen, und wie ich glaube, zweckentsprechenderen Gang genommen haben, so verdanke ich dies dem glücklichen Umstande, dass mir die Aufgabe der Normenberechnung bei einem besonders geeigneten Ausgangspunkte entgegentrat. Ich wurde nämlich durch eine von Herrn Kronecker gestellte Frage veranlasst, die Normen *trinomischer* komplexer Zahlen zu untersuchen und kam so zu dem Bd. **10** S. 79 (diese Zeitschrift) stehenden Ausdrucke. So blieben meine Rechnungen in ziemlich weitem Umfange wirklich ausführbar und ich sah mich in den Stand gesetzt, für die von wir gewählte Form alle Fragen nach Anzahl und Bildung der auftretenden Glieder vollständig beantworten zu können.

1. Fangen wir mit einem Beispiele an. Wir suchen die Norm

$$N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}); \qquad \alpha^{\lambda} = 1.$$

Zu diesem Zwecke bilden wir

$$P(z) = (z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}). \tag{1}$$

Dann hat die Gleichung $P(z) = 0$ die λ Wurzeln:

$$z_r = -(a\alpha^r + b\alpha^{\delta r} + c\alpha^{\varepsilon r}). \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, \lambda-1)$$

Suchen wir zunächst die Potenzsummen dieser Wurzeln zu bestimmen. Für jede komplexe Zahl

$$\varphi(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$$

erhält man

$$\varphi(1) + \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha^2) + \ldots + \varphi(\alpha^{\lambda-1}) = \lambda a_0. \tag{2}$$

Dies soll künftig durch

$$\Sigma\varphi(\alpha) = \lambda a_0 \tag{3}$$

kurz ausgedrückt werden. Bezeichnen wir nun die Summe der h^{ten} Potenzen kurz durch s_h, so ist:

$$s_h = z_0^h + z_1^h + \ldots + z_{\lambda-1}^h = \Sigma(-1)^h(a\alpha^r + b\alpha^{\delta r} + c\alpha^{\varepsilon r})^h. \tag{4}$$

Entwickeln wir nun rechts nach dem *polynomischen* Lehrsatze, so haben wir nur diejenigen Glieder zu berücksichtigen, welche wir oben mit a_0 bezeichneten, also die Glieder von der Form

$$(-1)^h \cdot \frac{\underline{|h}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|m}}\, a^k b^l c^m \cdot \alpha^{k+\delta l+\varepsilon m},$$

wo k, l, m den Bedingungen genügen müssen:

$$(5) \qquad \begin{cases} k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda}, \\ h = k + l + m \overline{\overline{<}}\, \lambda. \end{cases}$$

Wir sehen hier die verallgemeinerte Form derjenigen Kongruenzen vor uns, welche zuerst E. Kummer bei Zerlegung der ψ-Funktionen in Faktoren bemerkt hat. Ganz allgemein können wir diese Kongruenzen so erklären:

$$(6) \qquad \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m \equiv 0 \pmod{\lambda}, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m \overline{\overline{<}}\, \lambda. \end{cases}$$

Die $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sind *gegebene* positive oder negative ganze Zahlen, die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dürfen nur *positive* ganze Zahlen sein. Diese Kongruenzen bilden einen Hauptgegenstand unserer Untersuchungen und mögen kurz als Kummersche Kongruenzen m^{ter} Ordnung bezeichnet werden.

Für alle durch die Kummersche Kongruenz 3^{ter} Ordnung (5) bestimmten Wertegruppen k, l, m finden wir

$$(7) \qquad s_h = \lambda \sum_{k,\, l,\, m} (-1)^h \cdot \frac{\underline{|h}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|m}}\, a^k b^l c^m.$$

Aus diesen s_h sind die Koefficienten p_h durch die Waringsche Formel zu gewinnen. Obwohl diese Formel in der erwähnten Abhandlung S. 62 bereits von uns abgeleitet worden ist, können wir nicht umhin, diese Ableitung hier noch einmal in gedrängter Kürze zu wiederholen. Es soll nämlich eine, wie es scheint, *nicht unwesentliche Erweiterung* dieser bekannten algebraischen Formel angeschlossen werden.

Es ist

$$\log(z - z_r) = \log z - \frac{1}{z} \cdot z_r - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot z_r^2 - \ldots - \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{z^h} \cdot z_r^h - \ldots$$

Daher

$$\log P = \lambda \log z - \frac{1}{z} \cdot s_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot s_2 - \ldots - \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{z^h} \cdot s_h - \ldots .$$

Nun erscheinen aber unsere s_h, wie Gleichung (7) zeigt, wieder als *Summen* und zwar aus Summanden von der obigen Form. Demnach wird

$$P = z^{\lambda} \prod e^{\lambda(-1)^{h+1} \cdot \frac{(h-1)!}{k!\,l!\,m!} \frac{a^k b^l c^m}{z^h}}. \tag{8}$$

Für jede Wertgruppe k, l, m, welche der Kummerschen Kongruenz (5) genügt, hat man also die Reihe zu bilden:

$$1 + \ldots + \frac{1}{t!}(-1)^{th+t} \left\{ \lambda \frac{(h-1)!}{k!\,l!\,m!} \frac{a^k b^l c^m}{z^h} \right\}^t . \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots)$$

Die so entstehenden Reihen sind zu multipliziren und das Produkt noch mit z^{λ} zu vervielfachen. Alle Potenzen mit negativem Exponenten von z fallen weg. *Bei dieser Entwicklung spielen also die Wertverbindungen, welche den Kummerschen Kongruenzen genügen, dieselbe Rolle, welche bei der gewöhnlichen Waringschen Entwicklung den Potenzsummen zufällt.* Hierin besteht die oben angekündigte Erweiterung der Waringschen Formel. Man ist nun imstande, eine Reihe wichtiger Bemerkungen zu unserer Entwicklung zu machen.

1.) Eine Auflösung der Kummerschen Kongruenz lautet

$$k = 0, \qquad l = 0, \qquad m = \lambda.$$

Für diese Wertverbindung erhält P laut Formel (8) den Beitrag c^{λ}. Ebenso entstehen aus $k = 0$, $l = \lambda$, $m = 0$ und $k = \lambda$, $l = 0$, $m = 0$ die Beiträge b^{λ} und a^{λ}. $k = 0$, $l = 0$, $m = 0$ liefert z^{λ}.

2.) Ausser den vier Gliedern $z^{\lambda}, a^{\lambda}, b^{\lambda}, c^{\lambda}$ haben alle in P auftretenden Summanden den Faktor λ.

3.) Man kann die in (5) auftretende Ungleichung ersetzen durch

$$k + l + m < \lambda.$$

Denn für $k + l + m = \lambda$ erhalten wir in P die von z freien Glieder,

$$(a + b + c) N(a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}),$$

welche als Norm einer *trinomischen* Zahl (einer Zahl niedrigerer Ordnung) für erledigt gelten können.

Die vorstehenden Untersuchungen sind zwar nur für die *viergliedrige* Zahl $z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}$ durchgeführt. Allein es ist klar, dass die gezogenen Schlüsse mit geringer Änderung *allgemeine Geltung* erhalten.

Wir verzichten also darauf, die Faktoren unserer Norm nach *Perioden* zusammenzufassen. Anders wird der praktische Rechner verfahren. Er wird mit Reuschle z. B. für $\lambda = 3m + 1$ zunächst m Faktoren zu einem Produkte $A_0\eta_0 + A_1\eta_1 + A_2\eta_2$ vereinigen und dann die Norm dieser Zahl nehmen. Leider scheinen aber die Gesetze, nach denen sich die Zahlen A_0, A_1, A_2 bilden, durchaus nicht einfach zu sein. Ja, es ist sogar von grossem Vorteil, den Faktor $z + a + b + c$ zur Norm hinzuzufügen. Ist so in P der mit λ multiplicirte Teil berechnet, so weiss man, dass derselbe für jede komplexe *Einheit* von der Form $z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}$ *verschwinden* muss, wenn $a = b = c = z = \pm 1$ ist. *Und statt der Gleichung*

$$\alpha^{\lambda-1} + \alpha^{\lambda-2} + \ldots + \alpha + 1 = 0$$

haben wir die einfachere

$$\alpha^{\lambda} = 1$$

2. Wir stellen uns jetzt die Frage: *Wieviel Glieder enthält der entwickelte Ausdruck:*

$$(9) \qquad (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)N(a_1\alpha + a_2\alpha^{\delta} + \ldots + a_m\alpha^{\mu})?$$

Wir werden diese Frage wieder für die viergliedrige Zahl in (1) beantworten. Die Antwort wird in einer Form gegeben werden, welche sich alsbald verallgemeinern lässt. In dem entwickelten Produkte

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon})$$

kommen soviel wesentlich verschiedene Glieder vor als die Kummersche Kongruenz (5) Lösungen enthält. Darunter befinden sich aber die sämtlichen Glieder des Produkts nächstniedrigerer Ordnung, nämlich diejenigen, für welche $z = 0$, also $k + l + m = \lambda$ ist. Daher finden wir die Zahl, um welche die Gliederzahl des Produkts aus *vier* Elementen

die Gliederzahl des Produkts nächstniedrigerer Ordnung übertrifft, wenn wir die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$(10)\qquad k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

bestimmen, für welche ist

$$k + l + m < \lambda.$$

Wir betrachten die Funktion $\varphi(z, x)$ von der Form:

$$(11)\qquad \varphi(z, x) = \frac{1}{1 - xz} \cdot \frac{1}{1 - x^{\delta} z} \cdot \frac{1}{1 - x^{\varepsilon} z}.$$

Dann ist

$$\varphi(z, x) = \sum_{k, l, m} x^{k + \delta l + \varepsilon m} \cdot z^{k + l + m}. \qquad (k, l, m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Die Reihe ist konvergent, wenn die drei Grössen xz, $x^{\delta} z$, $x^{\varepsilon} z$ ihrem absoluten Betrage nach jede kleiner als Eins sind. Ersetzen wir x durch $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{\lambda}$ und addiren die so entstandenen Reihen, so wird rechts jede Potenz von x in Wegfall kommen, für welche die Kongruenz (10) nicht erfüllt ist. Jede Lösung k, l, m derselben liefert dagegen den Beitrag λ. So erhält man

$$(12)\qquad \sum_{\alpha} \varphi(z, \alpha) = \lambda \sum a_h \cdot z^h.$$

Hier bezeichnet a_h *die Anzahl der Lösungen der Kongruenz* (10), *welche die Eigenschaft haben, dass ihre Summe h ist;*

$$(13)\qquad k + l + m = h.$$

Setzen wir andererseits

$$(14)\qquad \psi(u) = (u - x)(u - x^{\delta})(u - x^{\varepsilon}),$$

so ist

$$(15)\qquad \varphi(z, x) = \frac{x^2}{\psi'(x)} \cdot \frac{1}{1 - xz} + \frac{x^{2\delta}}{\psi'(x^{\delta})} \cdot \frac{1}{1 - x^{\delta} z} + \frac{x^{2\varepsilon}}{\psi'(x^{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{1 - x^{\varepsilon} z}.$$

Als Koefficient von z^h erscheint daher jetzt:

$$(16)\qquad \frac{[illegible]}{\psi'(x)} + \frac{[illegible]}{\psi'(x^{\delta})} + \frac{[illegible]}{\psi'(x^{\varepsilon})}.$$

Wenn wir nun h alle Werte von Null bis $\lambda - 1$ durchlaufen lassen und dann über alle Werte $x = \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^\lambda$ summiren, endlich das Resultat durch λ dividiren, so erhalten wir zufolge (12) die Anzahl der Lösungen der Kongruenz (10). Schliessen wir zunächst den Betrag der Summe für $x = \alpha^\lambda = 1$ aus. Dann sind zwei Zahlen h' und h'' immer so wählbar, dass man erhält

$$(h' + 2)\delta \equiv (h'' + 2)\varepsilon \equiv (h + 2) \pmod{\lambda}.$$

Hierdurch aber verwandelt sich der Ausdruck (16) in

$$\alpha^{h+2}\left\{\frac{1}{\psi'(\alpha)} + \frac{1}{\psi'(\alpha^\delta)} + \frac{1}{\psi'(\alpha^\varepsilon)}\right\}.$$

Der Klammerausdruck ist, wie die Entwicklung von $\frac{1}{\psi'(u)}$ nach fallenden Potenzen von u zeigt, identisch *Null*. Mithin liefert die Summirung über die *komplexen* α zur *Summe der Koefficienten* a_h keinen Beitrag. Es bleibt also noch der Beitrag, den $x = 1$ liefert, zu bestimmen. Dieser ist zusammengesetzt aus sämtlichen Koefficienten von z^h in $\varphi(z, 1)$. Nun ist

$$\varphi(z, 1) = \frac{1}{(1 - z)^3} = \sum \frac{(h + 2)(h + 1)}{1 \cdot 2} z^h$$

und die Summe aller Zahlen $\frac{(h + 2)(h + 1)}{1 \cdot 2}$ von $h = 0$ bis $h = \lambda - 1$ beträgt $\frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Trennen wir λ ab, so ist die gesuchte Zahl $\frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2 \cdot 3}$. Um soviel *übertrifft* die Anzahl der Glieder des entwickelten Produkts P aus *vier* Elementen die Anzahl der Glieder des Produkts nächstniedrigerer Ordnung. Durch ganz analoge Schlüsse findet man, dass das Produkt P für *fünf* Elemente dasjenige für *vier* um

$$\frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

übertrifft u. s. w. Hiernach erhalten wir das Endergebnis:

Das aus m Elementen zusammengesetzte Produkt

$$P = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)\, N(a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_m\alpha^n)$$

enthält

$$(17)\quad g = 2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2) \ldots (\lambda + m - 2)}{2 \cdot 3 \ldots (m - 1)}$$

verschiedene Glieder.

So ist für $\lambda = 11$

$$m = 2\,,\ 3\,,\ 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 10,$$

$$g = 2\,,\ 8\,,\ 34\,,\ 125\,,\ 398\,,\ 1126\,,\ 2894\,,\ 6872\,,\ 15270.$$

3. Im vorhergehenden Paragraphen haben wir die *Anzahl* der verschiedenen Glieder des entwickelten Produkts P kennen gelernt. Wir suchen jetzt die *Beschaffenheit* dieser Glieder näher zu bestimmen. Wenn die komplexe Zahl, deren P gesucht wird, aus *vier* Elementen besteht, also

$$z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon},$$

so kann man fragen: *Wieviel Glieder $a^k b^l c^m z^n$ kommen in P vor, bei denen die Zahlen k, l, m, n sämtlich von Null verschieden sind?* Diese Frage ist nicht ohne Bedeutung. Denn ihre Beantwortung gibt zu erkennen, wieviel Koefficienten in P wirklich neu zu berechnen sind; ist nämlich eine der 4 Zahlen k, l, m, n Null, so kann man den betreffenden Koefficienten durch die Berechnung des P einer trinomischen Zahl finden. Und Gleiches gilt allgemein. Für die Berechnung des P einer aus m Elementen bestehenden Zahl sind nur diejenigen Lösungen der Kummerschen Kongruenz von Bedeutung, welche von Null verschieden sind.

Wir lösen die Aufgabe zunächst für $m = 4$ und dehnen dann die Lösung durch ein Verfahren weiter aus, welches dem im vorigen Paragraphen analog ist.

Für das P einer vierelementigen komplexen Zahl haben wir die 4 Glieder $z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda$. Verschwindet eins der Elemente, so entsteht eine trinomische Zahl, es erscheinen also $\frac{\lambda - 1}{2}$ Glieder von der Form $a^k b^l z^n$. Im ganzen zeigen also $4 \cdot \frac{\lambda - 1}{2}$ Glieder diese Form. Endlich

bleiben die Glieder von dem gesuchten Typus, x an der Zahl. Daher mit Rücksicht auf (17)

$$x + 4 \cdot \frac{\lambda - 1}{2} + 4 = 2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2 \cdot 3}.$$

Hieraus folgt durch leichte Rechnung:

$$x = \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2 \cdot 3} - \frac{\lambda - 1}{2}.$$

Zur Verallgemeinerung unseres Ergebnisses greifen wir auf die Funktion $\varphi(z, x)$ zurück. Für das entwickelte Produkt P der fünfelementigen komplexen Zahl

$$z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon} + d\alpha^{\vartheta}$$

fällt die Frage: »Wie gross ist die Anzahl der Glieder vom Typus $a^k b^l c^m d^n z^{\nu}$?» genau zusammen mit der folgenden: »Wie gross ist die Anzahl der Lösungen der KUMMERschen Kongruenz

$$k + \delta l + \varepsilon m + \vartheta n \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$k + l + m + n < \lambda,$$

wenn keine der Zahlen k, l, m, n verschwinden darf?»

Bilden wir die Funktion:

$$\frac{xz}{1 - xz} \cdot \frac{x^{\delta} z}{1 - x^{\delta} z} \cdot \frac{x^{\varepsilon} z}{1 - x^{\varepsilon} z} \cdot \frac{x^{\vartheta} z}{1 - x^{\vartheta} z} = \sum x^{k + \delta l + \varepsilon m + \vartheta n} \cdot z^{k + l + m + n},$$

so wird jetzt der Koefficient von z^h, wenn

$$\psi(u) = (u - x)(u - x^{\delta})(u - x^{\varepsilon})(u - x^{\vartheta}),$$

$$x^{1 + \delta + \varepsilon + \vartheta} \left| \frac{x^{h-1}}{\psi'(x)} + \frac{x^{(h-1)\delta}}{\psi'(x^{\delta})} + \frac{x^{(h-1)\varepsilon}}{\psi'(x^{\varepsilon})} + \frac{x^{(h-1)\vartheta}}{\psi'(x^{\vartheta})} \right|.$$

Für $h = 1, 2, 3$ wird der Klammerausdruck identisch *Null*. Lassen wir auch $h = \lambda$ zu, so durchlaufen die Exponenten von x wieder völlige Restsysteme mod λ, können also zur Summe Null zusammengefasst werden, wie früher. Bestimmt man den Beitrag für $x = 1$, so findet man ihn aus

$$\frac{z^4}{(1 - z)^4} = \sum \frac{(h - 1)(h - 2)(h - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^h,$$

analog wie früher zu $\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2.3.4}$. Aber diese Zahl ist noch um diejenige zu vermindern, welche der anfangs ausgeschlossenen Annahme $h=\lambda$ entspricht. Diese Annahme besagt aber, dass a, b, c, d einen von Null verschiedenen, z den Exponenten Null haben soll. Die Anzahl dieser Fälle haben wir oben bestimmt; es ist die Anzahl der *analogen* Glieder in *dem* P, welches ein Element weniger enthält. Die fünfelementige Zahl liefert also in dem entwickelten Produkte eine Anzahl Glieder

$$f=\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2.3.4}-\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2.3}+\frac{\lambda-1}{2},$$

welche alle 5 Elemente enthalten. So findet man allgemein:

In dem entwickelten Produkte

$$P=(a_1+a_2+\ldots+a_m)N(a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_m\alpha^m)$$

kommen f_m *Glieder vor, welche alle* m *Elemente enthalten, wo*

$$(18)\qquad f_m=\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-m+2)}{2.3\ldots(m-1)}-\frac{(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+3)}{2\ldots(m-2)}+\ldots\pm\frac{\lambda-1}{2}.$$

Für das Produkt aus $\lambda-1$ Elementen

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{\lambda-1})N(a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})$$

erhält man daher die bemerkenswerten Beziehungen:

$$f_{\lambda-1}=\frac{\lambda-1}{2}-\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2.3}+\ldots-\frac{\lambda-1}{2}=0.$$

Ebenso findet man

$$f_{\lambda-2}=\frac{\lambda-1}{2}$$

und allgemein

$$(19)\qquad f_{\lambda-\nu}=f_{\nu+1}.$$

Nun sind wir imstande, in einem gegebenen P_m die *Anzahl* und die *Form* der Glieder genauer anzugeben. In P_m finden sich f_m Glieder, in denen kein Element fehlt, $m.f_{m-1}$ Glieder, in denen *ein* Element fehlt,

$$\frac{m(m-1)}{1.2}.f_{m-2}$$

Glieder, in denen *zwei* Elemente fehlen, u. s. w.

So hat man für $\lambda = 7$ in dem Produkte P_6

6 . 3	Glieder,	welche	5	Elemente	enthalten,	= 18
15 . 2	»	»	4	»	»	30
20 . 3	»	»	3	»	»	60
6	»	»	1	»	»	6
					Im Ganzen	114

Diese Zahl liefert auch Formel (17).

Für $\lambda = 11$ hat man in dem vollständigen Produkte

$$P_{10} = (a_1 + \ldots + a_{10}) N(a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \ldots + a_{10} \alpha^{10})$$

10. 5	Glieder,	welche	9	Elemente	enthalten,	= 50
45 . 10	»	»	8	»	»	450
120 . 20	»	»	7	»	»	2400
210 . 22	»	»	6	»	»	4620
252 . 20	»	»	5	»	»	5040
210 . 10	»	»	4	»	»	2100
120. 5	»	»	3	»	»	600
10. 1	»	»	1	»	»	10
					Im Ganzen	15270 Glieder.

Stellen wir nun noch die *Lehrsätze* zusammen, welche für die KUMMERschen Kongruenzen im vorstehenden als richtig gefunden worden sind.

1.) Sei

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \overline{<} \lambda,$$

eine KUMMERsche Kongruenz m^{ter} Ordnung, so erhält man, wenn alle positiven ganzzahligen Lösungen einschliesslich 0 und λ zugelassen werden,

$$g = 2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \ldots + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2) \ldots (\lambda + m - 1)}{2 \cdot 3 \ldots m}$$

Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2.) Werden aber 0 und λ *nicht* zugelassen und soll sein

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m < \lambda.$$

so erhält man nur

$$f = \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)\ldots(\lambda - m + 1)}{2 \cdot 3 \ldots m} - \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)\ldots(\lambda - m + 2)}{2 \cdot 3 \ldots (m - 1)} + \ldots \pm \frac{\lambda - 1}{2}$$

Wertsysteme.

3.) Werden Lösungen $x_r = 0$ zugelassen, wird aber die Bedingung gestellt

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m < \lambda,$$

so beträgt die Anzahl der Lösungen

$$\frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)\ldots(\lambda + m - 1)}{2 \cdot 3 \ldots m}.$$

4.) Werden Lösungen $x_r = 0$ *ausgeschlossen,* aber die Summe gleich λ *zugelassen,* so beträgt die Anzahl der Lösungen

$$\frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)\ldots(\lambda - m + 1)}{2 \cdot 3 \ldots m}.$$

5.) Sind zwei Kummersche Kongruenzen gegeben

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m < \lambda,$$

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_n y_n \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n < \lambda,$$

unter Ausschluss der Lösungen $x_r = 0$, $y_s = 0$, so ist die Anzahl der Wertgruppen der x genau gleich derjenigen der y, wenn $m + n = \lambda - 1$.

Beispiel, $\lambda = 7$.

$$x_1 + 2x_2 \equiv 0 \pmod 7; \qquad y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 \equiv 0 \pmod 7$$

$$x_1 + x_2 < 7 \qquad\qquad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 < 7$$

$$x_1 = 5, 3, 1 \qquad y_1 = 1, 2, 1$$

$$x_2 = 1; 2; 3 \qquad y_2 = 1, 1, 3$$

$$y_3 = 1; 2, 1$$

$$y_4 = 2, 1, 1$$

Die vertikal unter einander stehenden Zahlen gehören zusammen. Lassen wir aber die Nulllösungen und die Summe $= \lambda = 7$ zu, so hat die zweite Kongruenz noch folgende Wertsysteme:

$$y_1 = 1, 3, 5, 0, 2, 4, 1, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 1,$$
$$y_2 = 3, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0.$$
$$y_3 = 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 1, 1, 3, 5, 0, 2, 4, 1, 3, 1, 0.$$
$$y_4 = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 4, 3, 4, 5.$$

$$y_1 = 0, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 1, 2, 1,$$
$$y_2 = 4, 2, 1, 0, 0, 0, 2, 4, 2, 1, 0, 0, 0, 2, 5, 3, 1, 5, 3, 1, 3, 1, 1,$$
$$y_3 = 2, 3, 4, 4, 3, 2, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 1, 2, 1,$$
$$y_4 = 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 1, 1, 2.$$

Dies sind 43 Lösungen, zu denen noch die 5 selbstverständlichen mit 4 bez. 3 Unbekannten $= 0$ treten. Im ganzen 48. Es ist

$$2 + \frac{8}{2} + \frac{8 \cdot 9}{2 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 2 + 4 + 12 + 30 = 48.$$

Lassen wir dagegen Nulllösung zu, die Summe $= 7 = \lambda$ aber nicht, so zählen wir 29 und die selbstverständliche $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$, im ganzen $30 = \dfrac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Verbieten wir endlich Nulllösungen, lassen aber die Summe 7 zu, so erhalten wir $5 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Diese 5 Lösungen sind

$$y_1 = 1, 3, 1, 2, 1,$$
$$y_2 = 1, 2, 3, 1, 1,$$
$$y_3 = 2, 1, 1, 2, 1,$$
$$y_4 = 3, 1, 1, 1, 2.$$

Unsere Sätze werden also sämtlich bestätigt.

Da Kummer die Kongruenzen mit *zwei* Unbekannten, welche wir

vorhin allgemein untersucht haben (mit m Unbekannten), bei der Faktorenzerlegung der ψ-Funktionen bemerkte, so könnte der Gedanke entstehen, dass durch analoge Schlüsse sich aus der Verallgemeinerung der Kongruenzen eine Verallgemeinerung der ψ-Funktionen ergeben werde. Meine Bemühungen in dieser Richtung haben mich aber nur zu Produkten der ψ gelangen lassen, sind also nicht von Erfolg gewesen.

4. Bisher haben wir Untersuchungen über Form und Zahl der im entwickelten Produkt P auftretenden Glieder angestellt. Wir wenden uns jetzt der Koefficientenbestimmung zu. Wir geben dem Produkte, welches wir auch kurz *Normprodukt* nennen werden, die Form

$$P = (z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}) \tag{20}$$

$$= z^{\lambda} + a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \lambda\sum K a^{k} b^{l} c^{m} z^{n}.$$

Wenn wir früher von *vierelementigen* Zahlen ausgingen, so verfolgten wir dabei wesentlich äussere Zwecke. Wir hätten mit einiger Einbusse an Durchsichtigkeit des Vortrags gleich die allgemeine Form mit m Elementen wählen können. Jetzt liegt die Sache anders. Die von jetzt ab vorzutragenden Entwicklungen können nur für *vierelementige* Normprodukte Geltung beanspruchen.

Die Zahlform $z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}$ kann im ganzen $\frac{(\lambda - 2)(\lambda - 3)}{2}$ verschiedene Gestalten aufweisen. Denn δ und ε dürfen alle verschiedenen Paare von 2 Zahlen aus der Reihe $2, 3, \ldots, \lambda - 2$ sein. Aber diese verschiedenen Paare führen nicht immer zu verschiedenen Normen. Bezeichnen wir nach dem Vorgange vieler Mathematiker den *numerus socius* von δ oder diejenige ganze Zahl δ', welche die Eigenschaft hat, dass $\delta\delta' \equiv 1 \pmod{\lambda}$ wird, kurz durch $\frac{1}{\delta}$, so ist:

$$N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}) = N(z + a\alpha^{\frac{1}{\delta}} + b\alpha + c\alpha^{\frac{\varepsilon}{\delta}}) = N(z + a\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} + b\alpha^{\frac{\delta}{\varepsilon}} + c\alpha).$$

Kennt man also die zum Paare δ, ε gehörige Norm, so erhält man durch Vertauschung von b mit a, a mit b die zum Paare $\frac{1}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta}$ gehörende Norm u. s. w.

Es ist aber auch

$$N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}) = N(z\alpha^{-1} + a + b\alpha^{\delta-1} + c\alpha^{\varepsilon-1})$$
$$= N(a + z\alpha + b\alpha^{1-\delta} + c\alpha^{1-\varepsilon}).$$

So sind wir zum Paare $1 - \delta$, $1 - \varepsilon$ gelangt. Es gelingt, durch Anwendung derselben Schlüsse, im ganzen 12 Paare anzugeben, welche zu 12 Normen führen, die durch die Berechnung einer einzigen aus ihnen gewonnen werden und, wie wir sagen werden, eine *Periode* bilden.

Diese 12 Paare sind die folgenden:

$$(21)\quad \left|\begin{array}{l} (\delta, \varepsilon)\,;\ \left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{\delta}{\varepsilon}\right);\ \left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right); \\[2ex] \left(\frac{1}{1-\varepsilon}, \frac{1-\delta}{1-\varepsilon}\right);\ \left(\frac{1-\varepsilon}{1-\delta}, \frac{1}{1-\delta}\right);\ (1-\delta, 1-\varepsilon); \\[2ex] \left(\frac{1-\varepsilon}{\delta-\varepsilon}, \frac{-\varepsilon}{\delta-\varepsilon}\right);\ \left(\frac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right);\ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}, \frac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon-1}\right); \\[2ex] \left(1-\frac{\varepsilon}{\delta}, 1-\frac{1}{\delta}\right);\ \left(\frac{\delta}{\delta-1}, \frac{\delta-\varepsilon}{\delta-1}\right);\ \left(\frac{\delta-1}{\delta-\varepsilon}, \frac{\delta}{\delta-\varepsilon}\right). \end{array}\right.$$

Die Art dieser Zusammenstellung erhellt aus Folgendem. Wir nennen diejenige *Substitution,* welche das Paar (δ, ε) in $\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{\delta}{\varepsilon}\right)$ überführt ω, ebenso diejenige, welche (δ, ε) in $\left(\frac{1}{1-\varepsilon}, \frac{1-\delta}{1-\varepsilon}\right)$ überführt χ; dann gewinnt das Schema (21) die folgende Gestalt:

$$(22)\quad \left|\begin{array}{l} 1\,,\ \omega\,,\ \omega^2\,, \\ \chi\,,\ \chi\omega\,,\ \chi\omega^2\,, \\ \chi^2\,,\ \chi^2\omega\,,\ \chi^2\omega^2\,, \\ \chi^3\,,\ \chi^3\omega\,,\ \chi^3\omega^2. \end{array}\right.$$

Die Zusammenstellung $\chi\omega$ bezeichnet, dass zuerst die Substitution χ und dann ω vorgenommen werden soll. Wir bemerken die Gleichungen:

$$(23)\qquad \omega^3 = 1, \qquad \chi^4 = 1.$$

Ferner bemerken wir, dass durch die Substitution $\omega\chi\omega\chi^2\omega^2$ das Paar (δ, ε) in (ε, δ) umgewandelt wird. Daher sehen wir, dass im ganzen 24 Wertepaare erhalten werden und *mehr können nicht vorhanden sein.* Denn die Zahlform $z + a\alpha + b\alpha^\delta + c\alpha^\varepsilon$ liefert durch Vertauschung der 4 Elemente z, a, b, c überhaupt 24 verschiedene Darstellungen und jede dieser Darstellungen können wir durch Division mit einer geeigneten Potenz von α und nachfolgende Vertauschung von α gegen eine andere geeignete Potenz von α in die Form $z + a\alpha + b\alpha^\delta + c\alpha^\varepsilon$ setzen.

Aber die Perioden der Paare (δ, ε) brauchen nicht 12-gliedrig zu sein. Sie können weniger Glieder enthalten.

1.) Wenden wir uns zunächst der Substitution χ zu und nehmen an, dass sie keine Veränderung bewirkt. Dann erhalten wir zur Bestimmung derjenigen (δ, ε), welche solche Perioden liefern, die Kongruenzen:

$$\delta \equiv \frac{1}{1-\varepsilon}, \qquad \varepsilon \equiv \frac{1-\delta}{1-\varepsilon} \pmod{\lambda}.$$

Hieraus folgt sofort $(1-\varepsilon)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}$, und wenn wir setzen

$$\vartheta^2 + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}, \tag{24}$$

dann erhalten wir die *dreigliedrige* Periode:

$$(-\vartheta, 1-\vartheta);\ \left(\frac{1+\vartheta}{2}, \frac{1-\vartheta}{2}\right);\ (1+\vartheta, \vartheta). \tag{25}$$

Wir bemerken, dass die *Summe* der Argumente bei dem zweiten Paare, die *Differenz* bei dem ersten und dritten der Einheit kongruent ist. Also ist die *Differenz* der Argumente bei *zwei* Paaren der Einheit kongruent.

2.) Nehmen wir an, χ bewirke Veränderung, aber χ^2 *nicht.* Dann gelangen wir zu den Kongruenzen

$$\delta \equiv \frac{1-\varepsilon}{\delta-\varepsilon}, \qquad \varepsilon \equiv \frac{-\varepsilon}{\delta-\varepsilon} \pmod{\lambda},$$

woraus folgt

$$\varepsilon - \delta \equiv 1 \pmod{\lambda}. \tag{26}$$

Hieraus folgt die *sechsgliedrige* Periode:

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} (\varepsilon - 1, \varepsilon);\ \left(\frac{1}{\varepsilon}, 1 - \frac{1}{\varepsilon}\right), \left(1 + \frac{1}{\varepsilon - 1}, \frac{1}{\varepsilon - 1}\right); \\ \left(\frac{1}{1-\varepsilon}, 1 + \frac{1}{1-\varepsilon}\right);\ \left(1 - \frac{1}{2-\varepsilon}, \frac{1}{2-\varepsilon}\right);\ (2 - \varepsilon, 1 - \varepsilon). \end{array}\right.$$

Auch hier haben wir, und zwar genau *viermal*, den Fall vor uns, dass die *Differenz* der Argumente die *Einheit* ergibt. Nur *viermal*, denn bei den andern ist die *Summe* der *Einheit* kongruent.

3.) Es bleibt die Annahme zu erledigen, dass ω keine Veränderung bewirken soll. Dann folgt

$$(28)\qquad \delta \equiv \varepsilon^2, \qquad \varepsilon^3 \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Es ergibt sich eine *viergliedrige* Periode, nämlich

$$(29)\qquad \begin{array}{c} (\varepsilon, \varepsilon^2); \\ \left(\frac{1}{1-\varepsilon}, -\varepsilon^2\right);\ \left(-\varepsilon, \frac{1}{1-\varepsilon^2}\right);\ (1 - \varepsilon^2, 1 - \varepsilon). \end{array}$$

Oben fanden wir, dass bei der *dreigliedrigen* Periode stets zwei Argumentenpaare, bei der *sechsgliedrigen* stets *vier* Paare entstehen, deren Differenz die Einheit ist. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass aus der Annahme $\varepsilon = \delta + 1$ immer ein *dreigliedriger* oder ein *sechsgliedriger* Cyklus sich ergeben muss. Mithin kommt weder in einem *zwölfgliedrigen* noch in einem *viergliedrigen* Cyklus ein Argumentenpaar von der Form $(\delta, \delta + 1)$ vor.

Nun ist es leicht, die Anzahl der Perioden, d. h. *die Anzahl der wesentlich verschiedenen vierelementigen Normen* anzugeben.

1.) Sei $\lambda = 12n + 1$. Die Kongruenzen $\vartheta^2 + 1 \equiv 0$ und $\varepsilon^3 \equiv 1 \pmod{\lambda}$ können beide erfüllt werden. Die Zahlenpaare $(\delta, \delta + 1)$, deren $\lambda - 3$ vorhanden sind, verteilen sich in den einen *dreigliedrigen* und $3n - 1$ *sechsgliedrige* Cyklen. Da $\frac{(\lambda - 2)(\lambda - 3)}{2} = (6n - 1)(12n - 1)$ Zahlenpaare vorhanden sind, so müssen $3n(2n - 1)$ *zwölfgliedrige* Perioden vorhanden sein. Im ganzen sind $6n^2 + 1$ verschiedene Normen zu berechnen.

2.) Sei $\lambda = 12n + 5$. Der *viergliedrige* Cyklus fehlt, der *dreigliedrige* ist vorhanden. Wir erhalten $n(6n + 1)$ *zwölfgliedrige*, $3n$ *sechsgliedrige* Cyklen, im ganzen $6n^2 + 4n + 1$ *verschiedene Normen.*

3.) $\lambda = 12n + 7$. Der *viergliedrige* Cyklus ist vorhanden, der *dreigliedrige* fehlt. Es existiren $3n(2n+1)$ *zwölfgliedrige*, $3n+1$ *sechsgliedrige* Cyklen, $6n^2 + 6n + 2$ *verschiedene Normen.*

4.) $\lambda = 12n + 11$. Die Ausnahmecyklen fehlen, man hat nur $6n^2 + 7n + 2$ *zwölfgliedrige*, $3n + 2$ *sechsgliedrige* Cyklen, im ganzen $6n^2 + 10n + 4$ *verschiedene Normen.*

Versteht man unter $E(a)$ diejenige ganze Zahl, welche nicht grösser als a ist, so ist in den *drei* ersten Fällen die Anzahl der *verschiedenen Normen* $1 + E\frac{(\lambda-1)^2}{24}$, im Falle $12n + 11$ aber $E\frac{(\lambda-1)^2}{24}$.

Zahlenbeispiele.

1.) $\lambda = 5$.

Es entsteht nur *ein* Cyklus, der dreigliedrige

$$(2,3).(2,4).(4,3).$$

Es ist nur *eine* Norm zu berechnen.

2. $\lambda = 7$.

Es entstehen *zwei* Cyklen, darunter noch kein zwölfgliedriger.

1. (2, 4);	2. (2, 3); (5, 3); (5, 4);
(2, 5); (3, 6); (6, 4).	(3, 4); (2, 6); (6, 5).

Es sind also *zwei* Normen zu berechnen:

$$N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4) \quad \text{und} \quad N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3).$$

3.) $\lambda = 11$.

Es entstehen 4 Cyklen, 2 sechsgliedrige, 2 zwölfgliedrige.

1. (2, 3); (4, 8); (7, 6);	2. (3, 4); (3, 9); (5, 4);
(5, 6); (2, 10); (10, 9).	(7, 8); (7, 5); (9, 8).
3. (2, 4); (3, 6); (2, 6);	4. (2, 8); (7, 3); (4, 6);
(7, 4); (3, 10); (10, 8);	(3, 8); (7, 10); (10, 4);
(7, 2); (6, 9); (5, 8);	(3, 5); (9, 5); (9, 4);
(10, 6); (2, 9); (5, 10);	(8, 6); (2, 5); (9, 7).

Es sind 4 Normen zu berechnen. Wir wählen für dieselben die kleinstmöglichen Zahlenpaare, also

$$N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3), \quad N(z + a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^4),$$
$$N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4), \quad N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^5).$$

4.) $\lambda = 13$.

Hier erhalten wir 7 verschiedene Normen, deren δ, ε wir angeben

$$\delta = 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2,$$
$$\varepsilon = 3, 4, 9, 11, 4, 5, 6.$$

(2, 3) und (3, 4) haben sechsgliedrige, (3, 9) einen viergliedrigen, (3, 11) einen dreigliedrigen, die übrigen haben zwölfgliedrige Cyklen.

5.) $\lambda = 17$.

Wir finden 11 verschiedene Normen, deren δ, ε wir angeben

$$\delta = 2, 3, 5, 4, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4,$$
$$\varepsilon = 3, 4, 6, 5, 4, 5, 6, 7, 5, 7, 6.$$

Die drei ersten geben sechsgliedrige Cyklen, (4, 5) den dreigliedrigen, die andern zwölfgliedrige Cyklen.

5. Schreiten wir jetzt zur Bestimmung der Koefficienten selbst. Betrachten wir zunächst *das Normprodukt mit dreigliedrigem Cyklus.*

Wir haben dem Normprodukte die Form erteilt:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\vartheta} + c\alpha^{\vartheta+1})$$
$$= z^{\lambda} + a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \lambda \sum K a^k b^l c^m z^n; \qquad \vartheta^2 + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Ausser dem Faktor $z + a\alpha + b\alpha^{\vartheta} + c\alpha^{\vartheta+1}$ ist vorhanden

$$z + a\alpha^{\vartheta} + b\alpha^{\vartheta^2} + c\alpha^{\vartheta^2+\vartheta} = z + a\alpha^{\vartheta} + b\alpha^{-1} + c\alpha^{\vartheta-1},$$

oder nach Multiplikation mit α $b + z\alpha + c\alpha^{\vartheta} + a\alpha^{\vartheta+1}$. Daher erleidet unsere Norm keine Veränderung, wenn man die Vertauschung anwendet und wiederholt, welche z in b, a in z, b in c und c in a überführt.

Daher haben die Glieder $b^n z^k c^l a^m$ und $a^k b^l c^m z^n$ u. s. w. gleichen Koefficienten. Man kann dies symbolisch so schreiben:

$$\left.\begin{array}{cccc} k & l & m & n \\ m & n & l & k \\ l & k & n & m \\ n & m & k & l \end{array}\right| K,$$

wo der an erster Stelle geschriebene Exponent dem a, der zweite dem b, der dritte dem c, der vierte dem z zukommt.

Es ist

$$k + \vartheta l + (\vartheta + 1)m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$k + l + m \overline{\overline{<}} \lambda.$$

k, l, m *können nicht gleich sein*, da $\vartheta + 1 \equiv 0$ folgen würde; also sind die aufgeschriebenen Exponentengruppen *wesentlich verschieden.* Die im allgemeinen vorhandenen

$$2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2 \cdot 3} - 4 = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 7)}{6}$$

Koefficienten schränken sich auf den 4^{ten} Teil ein, auf $\frac{(\lambda - 1)(\lambda + 7)}{24}$ wesentlich verschiedene.

Beispiel $\lambda = 13$; $\delta = 5$, $\varepsilon = 6$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} k = & 3, & 2, & 1, & 5, & 3, & 8, & 7, & 6, & 4, & 2, \\ l = & 2, & 1, & 0, & 3, & 1, & 1, & 0, & 4, & 2, & 0, \\ m = & 0, & 1, & 2, & 1, & 3, & 0, & 1, & 0, & 2, & 4, \\ n = & 8, & 9, & 10, & 4, & 6, & 4, & 5, & 3, & 5, & 7, \\ K = & +2, & -3, & +1, & -22, & -19, & +1, & -1, & +5, & +32, & +4. \end{array}$$

Zum besseren Verständnis wollen wir das zugehörige Normprodukt kurz andeuten:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^5 + c\alpha^6)$$

$$= z^{13} + a^{13} + b^{13} + c^{13} + 13\{2(a^3b^2z^8 + b^8c^2z^3 + a^2b^3c^8 + a^8c^3z^2)$$

$$- 3(a^2bcz^9 + ab^9cz^2 + ab^2c^9z + a^9bc^2z) + \ldots\}.$$

Wenden wir uns jetzt zu den *Normen mit viergliedrigem Cyklus.* Hier haben wir die Form erteilt:

$$(z+a+b+c)N(z+a\alpha+b\alpha^{\delta}+c\alpha^{\delta^2})$$

$$=z^{\lambda}+a^{\lambda}+b^{\lambda}+c^{\lambda}+\lambda\sum Kz^{n}a^{k}b^{l}c^{m}; \qquad \delta^3\equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Ausser dem Faktor $z+a\alpha+b\alpha^{\delta}+c\alpha^{\delta^2}$ ist auch vorhanden

$$z+a\alpha^{\delta}+b\alpha^{\delta^2}+c\alpha.$$

Unsere Norm erleidet keine Veränderung, wenn man a, b, c *cyklisch* vertauscht. Oder in unserer symbolischen Schreibweise

$$\left.\begin{matrix} k & l & m & n \\ l & m & k & n \\ m & k & l & n \end{matrix}\right\} K,$$

wo

$$k+\delta l+\delta^2 m\equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$k+l+m \overline{\overline{<}} \lambda.$$

k, l, m können *gleich* sein, da $1+\delta+\delta^2\equiv 0$ zutrifft. Scheiden wir die zugehörigen Exponentengruppen aus

$$\begin{matrix} k = & 1, & 2, & \ldots, & \frac{\lambda-1}{3}, \\ l = & 1, & 2, & \ldots, & \frac{\lambda-1}{3}, \\ m = & 1, & 2, & \ldots, & \frac{\lambda-1}{3}, \\ n = & \lambda-3, & \lambda-6, & \ldots, & 1, \end{matrix}$$

so verteilen sich die übrigen in Gruppen von je drei, welche denselben Koefficienten K aufweisen. Im ganzen sind $\frac{(\lambda-1)(\lambda+11)}{18}$ verschiedene K zu berechnen.

Beispiel: $\lambda = 19$; $\delta = 7$.

k	l.	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
12	1	0	6		3	5	0	11		0	6	10	3	
1	0	12	6	1	5	0	3	11	— 7	6	10	0	3	22
0	12	1	6		0	3	5	11		10	0	6	3	
8	0	1	10		13	2	1	3		6	3	1	9	
0	1	8	10	1	2	1	13	3	— 10	3	1	6	9	30
1	8	0	10		1	13	2	3		1	6	3	9	
16	0	2	1		9	8	1	1		8	7	0	4	
0	2	16	1	1	8	1	9	1	— 9	7	0	8	4	30
2	16	0	1		1	9	8	1		0	8	7	4	
1	7	11	0		10	4	0	5		10	2	3	4	
7	11	1	0	— 1	4	0	10	5	14	2	3	10	4	— 50
11	1	7	0		0	10	4	5		3	10	2	4	
14	3	2	0		6	4	9	0		6	1	4	8	
3	2	14	0	2	4	9	6	0	17	1	4	6	8	— 56
2	14	3	0		9	6	4	0		4	6	1	8	
0	5	2	12		9	1	2	7		5	7	2	5	
5	2	0	12	3	1	2	9	7	— 17	7	2	5	5	— 56
2	0	5	12		2	9	1	7		2	5	7	5	
3	4	11	1		8	3	6	2		8	5	3	3	
4	11	3	1	3	3	6	8	2	21	5	3	8	3	61
11	3	4	1		6	8	3	2		3	8	5	3	
13	0	4	2		1	11	5	2		4	2	7	6	
0	4	13	2	7	11	5	1	2	— 21	2	7	4	6	99
4	13	0	2		5	1	11	2		7	4	2	6	
1	1	1	16	2	2	2	2	13	23	3	3	3	10	98
4	4	4	7	86	5	5	5	4	— 101	6	6	6	1	— 83

Zum Verständnis:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^7 + c\alpha^{11})$$

$$= z^{19} + a^{19} + b^{19} + c^{19} + 19\{61(a^8b^5c^3z^3 + a^5b^3c^8z^3 + a^3b^8c^5z^3) + \ldots\}.$$

Für $a = b = c = z = 1$ finden wir, übereinstimmend mit der Reuschleschen Tafel $N(1 + \alpha + \alpha^7 + \alpha^{11}) = 11^3$.

Untersuchen wir jetzt die Normen mit *sechsgliedrigem Cyklus.* Hier haben wir die Form erteilt:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\delta+1}) = z^{\lambda} + a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \lambda\sum K a^k b^l c^m z^n.$$

$$k + \delta l + (\delta + 1)m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$k + l + m \leqq \lambda.$$

Statt der obigen Kongruenz können wir setzen

$$(30) \qquad k + m + \delta(l + m) \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Aus dieser Kongruenz folgt aber, da $k + l + m + n = \lambda$,

$$(31) \qquad l + n + \delta(k + n) \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Jeder Exponentengruppe k, l, m, n entspricht also eine andere l, k, n, m oder $a^k b^l c^m z^n$ und $a^l b^k c^n z^m$ haben *gleichen* Koefficienten. Man braucht also nur $\frac{(\lambda - 1)(\lambda + 7)}{12}$ verschiedene K wirklich zu berechnen.

Wenn wir in unserer Norm setzen $z = 1$, $c = ab$, so verwandelt sich das *Normprodukt* in

$$(1 + a)(1 + b)N(1 + a\alpha)(1 + b\alpha^{\delta}) = 1 + a^{\lambda} + b^{\lambda} + a^{\lambda}b^{\lambda}.$$

Die übrigen Glieder fallen fort. Hieraus folgen beachtenswerte Gleichungen. Denn es ist $\sum K a^{k+m} b^{l+m} = 0$. Da zu jedem $k + m$ die Kongruenz (30) das zugehörige $l + m$ eindeutig bestimmt, so haben wir den *Lehrsatz:*

Die Summe der K, für welche $k + m$ einen festen Wert hat, ist Null.

Sind die K unmittelbar auszurechnen, so haben sie den Wert:

$$(-1)^n \frac{\underline{|k + m + l - 1}}{\underline{|k}\,\underline{|m}\,\underline{|l}}.$$

Daher die für beliebige p, q gültige Formel:

$$(32) \qquad \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+q-1)}{\underline{|q}} - \frac{p(p+1)\ldots(p+q-2)}{\underline{|q-1}\,\underline{|1}}$$

$$+ \frac{(p-1)p\ldots(p+q-3)}{\underline{|q-2}\,\underline{|2}} - \ldots \pm \frac{(p-q+1)(p-q+2)\ldots(p-1)}{\underline{|q}} = 0.$$

z. B. $p = 10$, $q = 4$:

$$\frac{11.12.13}{1.2.3.4} - \frac{10.11.12}{1.2.3.1} + \frac{9.10.11}{1.2.1.2} - \frac{8.9.10}{1.1.2.3} + \frac{7.8.9}{1.2.3.4} = 0.$$

Beispiel eines *Normprodukts.* $\lambda = 13$, $\delta = 3$, $\varepsilon = 4$.

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
0	3	1	9	— 1	4	3	0	6	+ 5	10	1	0	2	+ 1	3	5	2	3	— 44
3	0	9	1		3	4	6	0		1	10	2	0		5	3	3	2	
1	0	3	9	— 1	5	0	2	6	+ 3	0	6	2	5	+ 3	4	6	1	2	+ 15
0	1	9	3		0	5	6	2		6	0	5	2		6	4	2	1	
1	4	0	8	+ 1	6	1	1	5	— 7	1	3	4	5	— 22	7	5	1	0	— 1
4	1	8	0		1	6	5	1		3	1	5	4		5	7	0	1	
2	1	2	8	+ 6	7	2	0	4	+ 4	1	7	1	4	— 5	8	2	3	0	+ 2
1	2	8	2		2	7	4	0		7	1	4	1		2	8	0	3	
3	2	1	7	— 10	9	0	1	3	— 1	2	4	3	4	+ 49	0	2	5	6	+ 3
2	3	7	1		0	9	3	1		4	2	4	3		2	0	6	5	

Zur Bestätigung unseres *Lehrsatzes* haben wir:

$$\begin{array}{ll}
k + m = 10, & \Sigma K = 1 - 1 = 0, \\
7, & 4 - 7 + 3 = 0, \\
4, & 5 - 10 + 6 - 1 = 0, \\
1, & 1 - 1 = 0, \\
11, & 3 + 2 - 5 = 0, \\
8, & 49 - 22 + 3 - 1 + 15 - 44 = 0.
\end{array}$$

Endlich betrachten wir die *Normen mit zwölfgliedrigem Cyklus.*

Hier müssen wir die allgemeine Form bestehen lassen, dürfen aber annehmen, dass $\varepsilon > \delta$. Die Kummersche Kongruenz

$$k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$k + l + m \overline{\gtrless} \lambda,$$

können wir in eine Reihe *Gleichungen* verwandeln. Diese Gleichungen bilden *zwei* Systeme, wie folgt.

I. System.	II. System.
$k + \delta l + \varepsilon m = \lambda,$	$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n = (\varepsilon - 1)\lambda,$
$k + \delta l + \varepsilon m = 2\lambda,$	$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n = (\varepsilon - 2)\lambda,$
. . . .	. . . .
$k + \delta l + \varepsilon m = (\varepsilon - 1)\lambda,$	$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n = \lambda.$

Diejenigen k, l, m, welche der *ersten* Gleichung des *ersten* Systems angehören, liefern K, welche direkt berechnet werden können. Man findet

$$K = (-1)^{k+l+m-1} \frac{\underline{|k + l + m - 1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|m}}. \tag{33}$$

Ebenso die k, l, n, welche der *letzten* Gleichung des *zweiten* Systems angehören. Man findet

$$K = (-1)^{k+l+n-1} \frac{\underline{|k + l + n - 1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|n}}. \tag{33a}$$

Ist ε im Verhältniss zu δ gross, so wird man sich mit Vorteil des *zweiten* Systems bedienen. Denn die letzte Zeile desselben sagt aus, da

$$\varepsilon - \delta \leq \varepsilon - 1 < \varepsilon, \quad \text{dass}$$

$$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n > (k + l + n)(\varepsilon - \delta),$$

also

$$k + l + n < \frac{\lambda}{\varepsilon - \delta}.$$

Mithin gibt eine Gruppe k_r, l_r, m_r der r^{ten} Zeile (von unten) des zweiten Systems mit einer Gruppe der s^{ten} Zeile zusammen $k_r + k_s, l_r + l_s, m_r + m_s$ eine Gruppe der $r + s^{\text{ten}}$ Zeile, weil

$$k_r + k_s + l_r + l_s + m_r + m_s < \frac{(r + s)\lambda}{\varepsilon - \delta} < \lambda.$$

so lange $r + s$ kleiner als $\varepsilon - \delta$ ist.

Im ganzen hat man 4 Kongruenzen, von denen man ausgehen kann, nämlich

$$
(34)\qquad \left.\begin{aligned}
k + \delta l + \varepsilon m &\equiv 0\\
(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n &\equiv 0\\
(\delta - 1)l + (\varepsilon - 1)m + (\lambda - 1)n &\equiv 0\\
(\lambda - \delta + 1)k + (\varepsilon - \delta)m + (\lambda - \delta)n &\equiv 0
\end{aligned}\right| \pmod{\lambda}.
$$

Jede derselben kann man mit einer willkürlichen ganzen Zahl multipliciren. Durch diese Operation wird die Anzahl der Gleichungen vermehrt oder vermindert, welche die Kongruenz ersetzen. Eine Vermehrung derselben lässt die Art der Gruppenzusammensetzung aus kleineren k, l, m deutlicher hervortreten, schädigt aber die Übersichtlichkeit. Es ist zweckmässig, zunächst alle 4 Kongruenzen zu bilden und als Gleichungen mit den rechten Seiten λ, 2λ, 3λ bezüglich ihrer nicht zusammengesetzten Lösungen zu untersuchen.

Man kann fragen, in wieviel *Normprodukten*, zur Primzahl λ, die Exponentengruppe k, l, m, n auftritt. Fassen wir in der Kongruenz

$$k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

die Zahlen k, l, m als gegeben, δ, ε als gesucht auf; zu jedem

$$\delta = 2, 3, \ldots, \lambda - 1$$

gehört ein festbestimmtes ε und nur $\varepsilon = 1$ ist unter diesen zu verwerfen. Also kann man im ganzen $\lambda - 3$ Zahlenpaare ε, δ angeben, welche *Normprodukte* der gesuchten Art liefern. Bilden wir nun alle diese Normprodukte, bilden wir ferner die 24 Vertauschungen der k, l, m, n und berechnen in allen $24(\lambda - 3)$ Normprodukten die zugehörigen K, so können wir den Satz aussprechen:

Alle eben besprochenen K sind mod λ *kongruent.*

Die Zahlen K bestehen gemäss Gleichung (8) aus einem unmittelbar zu berechnenden Teile und aus Teilen, welche dadurch entstehen, dass drei der k, l, m, n aus kleineren Gruppenzahlen durch Addition zusammengesetzt sind. Findet keine Zusammensetzung statt, so fehlen diese

Teile gänzlich. Für unsern Satz sind diese Teile auch völlig gleichgültig. Denn sie haben den Faktor λ mindestens in erster Potenz. Unser Satz ist also bewiesen, wenn die Teile, welche unmittelbar berechnet werden können, kongruent sind. Dies zeigen wir für die Vertauschung k, l, n, m. Die betreffenden Ausdrücke stehen (33) und (33a). Es muss also sein, $(k + l + m + n = \lambda)$,

$$(35) \qquad (-1)^n \cdot \frac{\underline{|\lambda - n - 1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|m}} \equiv (-1)^m \frac{\underline{|\lambda - m - 1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|n}} \pmod{\lambda}.$$

Nun ist:

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^n \cdot \underline{|n} \equiv (\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots (\lambda - n) \\ (-1)^m \cdot \underline{|m} \equiv (\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots (\lambda - m) \end{array}\right\} \pmod{\lambda},$$

und daraus folgt die Richtigkeit der Kongruenz (35). Jedes berechnete Normprodukt liefert *Zahlenbeispiele* zu diesem bemerkenswerten Satze. Es ist auffallend, dass die *Kongruenz* oft zur *Gleichheit* wird. Diese Gleichheit ergab sich uns bei den nicht zwölfgliedrigen Cyklen für einige bestimmte Vertauschungen als notwendig.

6. Jetzt wollen wir in einigen besonderen Fällen die Berechnung von Normprodukten vollständig ausführen.

Als erstes Beispiel wählen wir

$$(z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3).$$

Hier gelten die Bestimmungen

$$k + 2l + 3m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$k + l + m < \lambda.$$

Die Kongruenz ersetzen wir durch die beiden Gleichungen:

$$k + 2l + 3m = \lambda, \qquad k + 2l + 3m = 2\lambda.$$

Die letztere können wir wieder durch $l + 2k + 3n = \lambda$ ersetzen. Somit haben wir, wie bei den sechsgliedrigen Normen überhaupt, die zulässige Vertauschung k, l und m, n. Das Normprodukt kann ohne Rechnung niedergeschrieben werden. Sei

$$h = k + l + m, \qquad k = \lambda - 2l - 3m, \qquad n = l + 2m.$$

Dann ist:

$$(36)\qquad (z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3)$$

$$= z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + \lambda \sum (-1)^l \frac{|\underline{h-1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{m}} (a^k b^l c^m z^n + a^l b^k c^n z^m).$$

Zahlenbeispiel: $\lambda = 13$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 3$.

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
1	0	4	8	1	1	6	0	6	1	4	3	1	5	— 35	7	3	0	3	— 12
0	1	8	4		6	1	6	0		3	4	5	1		3	7	3	0	
0	2	3	8	2	2	4	1	6	15	5	1	2	5	— 21	8	1	1	3	— 9
2	0	8	3		4	2	6	1		1	5	5	2		1	8	3	1	
0	5	1	7	— 1	3	2	2	6	30	5	4	0	4	14	9	2	0	2	5
5	0	7	1		2	3	6	2		4	5	4	0		2	9	2	0	
1	3	2	7	— 10	4	0	3	6	5	6	2	1	4	28	10	0	1	2	1
3	1	7	2		0	4	6	3		2	6	4	1		0	10	2	1	
2	1	3	7	— 10	3	5	0	5	— 7	7	0	2	4	4	11	1	0	1	— 1
1	2	7	3		5	3	5	0		0	7	4	2		1	11	1	0	

Da $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$ eine *Einheit,* so ist die Summe der K Null. Im vorigen Normprodukte, Seite 288, hatten die Vertauschungen 3, 2, 1, 7 und 2, 3, 7, 1 *denselben* Koefficienten — 10 wie die hier auftretenden. Man erkennt darin eine Bestätigung unseres im vorigen Paragraphen bewiesenen *Lehrsatzes.*

Als zweites Beispiel wählen wir

$$(z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4).$$

Hier wählen wir die drei Gleichungen:

$$k + 2l + 4m = \lambda,$$

$$3k + 2l + 4n = 2\lambda,$$

$$3k + 2l + 4n = \lambda.$$

Ferner bilden wir

$$A_1 = \lambda \sum (-1)^n \frac{|\underline{\lambda - n - 1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{m}} z^n a^k b^l c^m$$

für alle k, l, m der ersten Gleichung;

$$A_2 = \lambda \sum (-1)^m \frac{(\lambda - m - 1)!}{k!\, l!\, n!} z^n a^k b^l c^m$$

für alle k, l, n der zweiten Gleichung;

$$A_3 = \lambda \sum (-1)^m \frac{(\lambda - m - 1)!}{k!\, l!\, n!} z^n a^k b^l c^m$$

für alle k, l, n der dritten Gleichung.

Dann ist:

$$(37) \qquad (z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4)$$

$$= z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + A_1 + A_2 + A_3 + \frac{1}{2} c^{-\lambda} A_3^2.$$

Für $\delta = 2$, $\varepsilon = 5$ bilden wir

$$A_1 = \lambda \sum (-1)^n \frac{(\lambda - n - 1)!}{k!\, l!\, m!} a^k b^l c^m z^n$$

mit der Bedingung $k + 2l + 5m = \lambda$.

Ferner die drei Summen B_1, B_2, B_3 nach dem Schema

$$B_r = \lambda \sum (-1)^m \frac{(\lambda - m - 1)!}{k!\, l!\, n!} a^k b^l c^m z^n$$

mit der Bedingung

$$4k + 3l + 5n = r\lambda.$$

Dann wird

$$(38) \qquad (z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^5)$$

$$= z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + A_1 + B_1 + B_2 + B_3 + \frac{1}{2} c^{-\lambda} B_1^2 + c^{-2\lambda} B_1 B_2 + \frac{1}{6} c^{-2\lambda} B_1^3.$$

Als Zahlenbeispiele nehmen wir

1.) $\lambda = 13\,,\ \delta = 2\,,\ \varepsilon = 4.$

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
11	1	0	1	− 1	1	4	1	7	− 5	0	7	3	3	− 12	2	2	5	4	6
9	2	0	2	5	5	0	2	6	3	2	6	3	2	17	4	1	5	3	4
7	3	0	3	− 12	3	1	2	7	− 10	4	5	3	1	− 9	6	0	5	2	3
5	4	0	4	14	1	2	2	8	6	6	4	3	0	5	2	0	6	5	3
3	5	0	5	7	1	0	3	9	− 1	0	5	4	4	14	0	1	6	6	1
1	6	0	6	1	0	11	1	1	− 1	2	4	4	3	− 16	1	5	7	0	− 1
9	0	1	3	− 1	2	10	1	0	1	4	3	4	2	10	3	2	8	0	2
7	1	1	4	8	0	9	2	2	5	6	2	4	1	2	3	0	9	1	− 1
5	2	1	5	21	2	8	2	1	− 7	8	1	4	0	1	1	3	8	1	4
3	3	1	6	20	4	7	2	0	4	0	3	5	5	− 7	1	1	9	2	− 3

2.) $\lambda = 13\,,\ \delta = 2\,,\ \varepsilon = 5.$

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
1	6	0	6	1	8	0	1	4	1	3	4	3	3	− 4	1	4	6	2	2
3	5	0	5	− 7	1	1	2	9	− 3	5	3	3	2	− 5	3	3	6	1	7
5	4	0	4	14	3	0	2	8	2	7	2	3	1	3	5	2	6	0	3
7	3	0	3	− 12	1	10	1	1	2	9	1	3	0	− 1	0	2	7	4	4
9	2	0	2	5	3	9	1	0	− 1	0	3	4	6	5	2	1	7	3	3
11	1	0	1	− 1	0	8	2	3	2	4	1	4	4	− 8	4	0	7	2	4
0	4	1	8	1	2	7	2	2	11	6	0	4	3	5	1	3	9	0	1
2	3	1	7	− 10	4	6	2	1	− 11	1	0	5	7	− 1	2	0	10	1	1
4	2	1	6	15	6	5	2	0	3	0	7	5	1	− 1	0	1	10	2	1
6	1	1	5	7	1	5	3	4	17	2	6	5	0	3	2	2	4	5	6

3.) $\lambda = 13\,,\ \delta = 2\,,\ \varepsilon = 6.$

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
1	6	0	6	1	1	0	2	10	1	4	0	8	1	1	1	2	10	0	1
3	5	0	5	7	0	10	1	2	1	2	3	3	5	18	3	3	5	2	8
5	4	0	4	14	2	9	1	1	− 3	4	2	3	4	10	5	2	5	1	− 8
7	3	0	3	− 12	4	8	1	0	1	6	1	3	3	− 6	7	1	5	0	− 1
9	2	0	2	5	0	7	2	4	4	8	0	3	2	2	1	1	6	5	6
11	1	0	1	− 1	2	6	2	3	− 9	0	1	4	8	1	3	0	6	4	5
1	3	1	8	4	4	5	2	2	19	2	0	4	7	4	0	5	7	1	− 1
3	2	1	7	− 10	6	4	2	1	− 11	1	7	4	1	− 5	2	4	7	0	4
5	1	1	6	6	8	3	2	0	2	3	6	4	0	5	0	2	8	3	2
7	0	1	5	− 1	0	4	3	6	5	1	4	5	3	− 9	2	1	8	2	6
k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K

Der Vollständigkeit wegen mag noch das letzte der 7 selbständigen viereleinentigen Normprodukte zur Primzahl 13 angegeben werden.

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
0	10	2	1	1	1	3	0	9	— 1	8	3	1	1	4
1	4	8	0		3	9	0	1		3	1	1	8	
4	0	8	1		9	1	0	3		1	8	1	3	
0	1	8	4		0	5	1	7		0	7	4	2	
10	1	2	0		5	7	1	0		7	2	4	0	
1	0	2	10		7	0	1	5		2	0	4	7	
2	5	5	1	5	2	3	2	6	17	2	8	3	0	2
5	1	5	2		3	6	2	2		8	0	3	2	
1	2	5	5		6	2	2	3		0	2	3	8	
0	4	6	3		1	5	3	4		5	2	0	6	3
4	3	6	0		5	4	3	1		2	6	0	5	
3	0	6	4		4	1	3	5		6	5	0	2	
1	1	10	1	2	3	3	4	3	22					
2	2	7	2	11	4	4	1	4	18					

Hier ist $\lambda = 13$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 6$. Bei weiterer Ausrechnung ergab sich:

$$N(1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6) = 3^6, \qquad N(1 - \alpha + \alpha^4 + \alpha^6) = 313.$$

$$N(-1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6) = N(1 + \alpha - \alpha^4 + \alpha^6) = 131.$$

$$N(1 + \alpha + \alpha^4 - \alpha^6) = 3^3.$$

Vergleicht man die K mit den bei $\lambda = 19$ berechneten, so scheinen dieselben noch manche andere Gesetzmässigkeiten zu befolgen; auf die wir jedoch nur mit dieser Hindeutung verweisen.[1]

Endlich mag der Ausdruck des vollständigen Normproduktes für $\lambda = 7$ hier Platz finden. Wir schreiben denselben in abgekürzter Form folgendermassen:

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) N(a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 + a_5\alpha^5 + a_6\alpha^6) \\ &= a_1^7 + 7\big\{a_1 a_2 a_3^3 a_4 a_5 + 5 a_1 a_2^2 a_3 a_4^2 a_5 - 2 a_1^2 a_2 a_3 a_4 a_5^2 - 3 a_1^3 a_2^2 a_3 a_4 - 3 a_2 a_3 a_4^2 a_5^3 \\ &- 3 a_1 a_2 a_3^2 a_4^3 + 2 a_1^4 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2^2 a_3^2 a_4^2 - a_1^3 a_2 a_3^3 - a_1^3 a_2^3 a_4 - a_1 a_2^5 a_3 - a_3 a_4^5 a_5 \\ &+ 2 a_1^2 a_2^3 a_3^2 + 2 a_3^2 a_4^3 a_5^2 + a_1^4 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_2^4 a_4 + a_1 a_3^4 a_4^2 + a_1^2 a_3 a_4^4\big\}. \end{aligned}$$

[1] Zahlreiche Bestätigungen unseres Lehrsatzes (Seite 290) zeigen die vorstehenden Beispiele auf den ersten Blick.

Jedes niedergeschriebene Glied vertritt 6 Glieder, welche aus demselben durch Multiplikation der Indices mit 1 . 2 , 3 , 4 , 5 , 6 hervorgehen. So vertritt $a_1 a_2^5 a_3$ die folgende Summe:

$$a_1 a_2^5 a_3 + a_2 a_4^5 a_6 + a_3 a_6^5 a_2 + a_4 a_1^5 a_5 + a_5 a_3^5 a_1 + a_6 a_5^5 a_4 .$$

Dieses *vollständige Normprodukt* wurde berechnet aus einem fünfelementigen. Die Rechnung selbst war mit Hülfe unserer Sätze über Anzahl und Bau der Glieder eine überraschend einfache zu nennen.

Coesfeld im Februar 1888.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE GALOIS
DANS LA THÉORIE
DE LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS

PAR

J. T. SÖDERBERG
à UPSALA.

1. Dans les quelques pages suivantes je me propose de présenter une démonstration nouvelle et très simple de l'important théorème de Galois sur l'existence du groupe de substitutions appelé *groupe d'une équation algébrique.* Elle a été publiée en suédois dans ma thèse inaugurale *Deduktion af nödvändiga och tillräckliga vilkoret för möjligheten af algebraiska eqvationers solution med radikaler,* Upsala Universitets Årsskrift, 1886. Je la présente ici avec de légères modifications.

2. Avant d'en commencer l'exposition nous aurons à nous expliquer sur le sens particulier que nous attribuerons à certaines expressions. Nous conviendrons de regarder, avec Galois, comme *rationnelle* toute quantité qui peut s'exprimer par une fonction rationnelle aux coefficients commensurables à l'unité de certaines quantités données à priori et que nous regarderons comme *connues.* Pour qu'une *fonction* soit appelée *rationnelle* nous entendrons que tous les coefficients en soient rationnelles.

Si une fonction rationnelle des quantités

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

reste invariable par les substitutions d'un certain groupe, même en sup-

posant $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ des variables indépendantes, nous dirons que la *forme* de la fonction reste invariable par ces substitutions. Et nous distinguerons soigneusement ce cas de l'autre, où,

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

étant les racines d'une équation donnée

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

à coefficients rationnels, ce n'est que la *valeur* de la fonction qui reste invariable par certaines substitutions.

3. En partant des propositions établies par LAGRANGE dans son célèbre Mémoire *Réflexions sur la résolution algébrique des équations,* Section IV, il est facile d'établir le théorème suivant:

Si y et V sont deux fonctions rationnelles des racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ d'une équation algébrique donnée, et que la valeur de y reste invariable par toutes les substitutions qui ne changent pas la valeur de V, la fonction y peut s'exprimer en fonction rationnelle de V.

En effet, LAGRANGE a démontré la proposition suivante:

Si z et V sont deux fonctions rationnelles des racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ d'une équation algébrique, si $1, s_1, \ldots, s_{k-1}$ sont les substitutions qui ne changent pas la forme de la fonction V, si les mêmes substitutions laissent aussi invariable la forme de la fonction z, si enfin $1, \sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}$ sont des substitutions tellement choisies que le tableau

$$\begin{array}{lllll}
1, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_{k-1}, \\
\sigma_1, & s_1\sigma_1, & s_2\sigma_1, & \ldots, & s_{k-1}\sigma_1, \\
\sigma_2, & s_1\sigma_2, & s_2\sigma_2, & \ldots, & s_{k-1}\sigma_2, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\sigma_{i-1}, & s_1\sigma_{i-1}, & s_2\sigma_{i-1}, & \ldots, & s_{k-1}\sigma_{i-1}
\end{array}$$

donne toutes les substitutions différentes qui ne changent pas la valeur de V,

la moyenne arithmétique des fonctions qui résultent de z en faisant les substitutions $1, \sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}$, *sera exprimable en fonction rationnelle de V.*

Or, il est facile de s'assurer que notre proposition est une conséquence immédiate de celle de Lagrange. D'abord, la moyenne arithmétique des fonctions qu'on obtient de y par les substitutions $1, s_1, \ldots, s_{k-1}$, est une fonction nouvelle z, dont la forme reste invariable par ces substitutions. De plus, si l'on forme la moyenne arithmétique des fonctions résultant de z par les substitutions $1, \sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}$, on aura le même résultat qu'en prenant la moyenne arithmétique de toutes les fonctions qui s'obtiennent de y en faisant les substitutions du tableau ci-dessus. Mais il suit de notre hypothèse que toutes ces fonctions, et par conséquent leur moyenne arithmétique, sont égales à y. Donc, en appliquant à la fonction z le théorème de Lagrange, on voit que y s'exprime en fonction rationnelle de V.

c. q. f. d.

4. Supposons que

$$V_0, V_1, \ldots, V_{i-1}$$

soient toutes les formes différentes dont la valeur est égale à la valeur donnée V_0 qu'on puisse faire acquérir à la fonction V en faisant toutes les substitutions possibles. Considérons toutes les substitutions dont l'effet est de remplacer le système des formes

$$V_0, V_1, \ldots, V_{i-1}$$

par un autre qui ne contient pas de forme nouvelle; il est évident que ces substitutions forment un groupe. Nous dirons que ce groupe appartient à la valeur V_0 de la fonction V. Les substitutions de ce groupe sont, par conséquent, celles qui laissent invariable la valeur de chacune des fonctions

$$V_0, V_1, \ldots, V_{i-1}.$$

Il est facile maintenant de modifier la proposition citée plus haut de la manière suivante:

Si y est une fonction rationnelle des racines $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ dont la valeur n'est pas changée par les substitutions du groupe appartenant à une

valeur donnée de la fonction V, on peut exprimer y en fonction rationnelle de V.

En effet, on peut choisir les quantités rationnelles

$$k_0, k_1, \ldots, k_{i-1}$$

de manière que la valeur de la fonction

$$Q = k_0 V_0 + k_1 V_1 + \ldots + k_{i-1} V_{i-1}$$

ne reste invariable que par les substitutions qui laissent invariable la valeur de chacune des fonctions $V_0, V_1, \ldots, V_{i-1}$. Donc y est fonction rationnelle de Q et, par conséquent, de V, puisque toutes les fonctions $V_0, V_1, \ldots, V_{i-1}$ ont la même valeur V.

5. Avant d'aborder la démonstration du théorème fondamental de Galois, nous établirons encore le point suivant. Admettons que U et V soient les valeurs données de deux fonctions rationnelles des racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Il est facile alors de former une autre fonction rationnelle R des mêmes racines, telle que le groupe appartenant à une valeur donnée de R soit formé par les substitutions communes aux deux groupes qui appartiennent aux valeurs données des deux fonctions U et V. En effet, supposons que

$$U_0, U_1, \ldots, U_{i-1}$$

soient les différentes formes de la première fonction dont la valeur est U, et que

$$V_0, V_1, \ldots, V_{j-1}$$

aient une signification analogue pour la fonction V. Considérons une fonction rationnelle de la forme

$$R = h_0 U_0 + h_1 U_1 + \ldots + h_{i-1} U_{i-1} + k_0 V_0 + k_1 V_1 + \ldots + k_{j-1} V_{j-1},$$

où nous supposerons que les coefficients h et k soient des quantités rationnelles. Toutes les formes diverses que peut acquérir la fonction R par les substitutions, seront représentées par la formule

$$h_0 U_{\alpha_0} + h_1 U_{\alpha_1} + \ldots + h_{i-1} U_{\alpha_{i-1}} + k_0 V_{\beta_0} + k_1 V_{\beta_1} + \ldots + k_{j-1} V_{\beta_{j-1}},$$

où $U_{\alpha_0} \ldots U_{\alpha_{i-1}}$ et $V_{\beta_0} \ldots V_{\beta_{j-1}}$ sont des formes quelconques que peuvent acquérir les fonctions U et V par les substitutions. Il est clair que nous pouvons choisir les coefficients h et k, de manière que la valeur de chacune de ces formes soit différente de la valeur donnée, à moins que toutes les fonctions $U_{\alpha_0} \ldots U_{\alpha_{i-1}}$ n'aient la valeur U et les fonctions $V_{\beta_0} \ldots V_{\beta_{i-1}}$ la valeur V.

Mais alors R est une fonction comme celle dont nous avons annoncé l'existence. Les fonctions $U_{\alpha_0} \ldots U_{\alpha_{i-1}}$ ayant toutes la valeur U, et les fonctions $V_{\beta_0} \ldots V_{\beta_{i-1}}$ la valeur V, on a

$$R = (h_0 + \ldots + h_{i-1})\,U + (k_0 + \ldots + k_{j-1})\,V.$$

6. Il est facile à présent d'établir le théorème de Galois, dont voici l'énoncé:

Si une équation algébrique n'a pas de racines égales, il y a toujours un groupe de substitutions — et il n'y en a qu'un — qui jouit de la double propriété suivante:

1° *toute fonction rationnelle des racines dont la valeur est rationnelle, reste invariable par les substitutions du groupe;*

2° *réciproquement, toute fonction rationnelle des racines dont la valeur n'est pas changée par les substitutions du groupe, s'exprime rationnellement par les quantités connues.*

Ce groupe a été appelé par Galois *le groupe de l'équation.*

Considérons l'ensemble des groupes qui appartiennent à des valeurs données des fonctions rationnelles de $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ exprimables rationnellement par les quantités connues. Parmi ces groupes, il y en aura un dont l'ordre est moindre ou égal à celui de tout autre groupe. Soit G ce groupe; je dis qu'il jouit de la double propriété dont il s'agit.

En effet, soient Γ un quelconque des groupes considérés, J le groupe des substitutions communes à G et à Γ, ω et Ω les fonctions rationnelles des racines auxquelles correspondent les groupes G et Γ; il y aura (n° 5) une fonction rationnelle des racines, dont le groupe appartenant à une valeur donnée sera précisément J. De plus, cette fonction s'exprimant en fonction rationnelle et linéaire de ω et Ω, il faut que sa valeur soit rationnelle. L'ordre de J ne peut donc être inférieur à celui de G.

d'où il suit que ces deux groupes sont identiques, et que, par conséquent, les substitutions de G font toutes partie du groupe Γ.

La première partie du théorème de Galois se trouve donc établie.

La démonstration de la seconde partie est immédiate. En effet (n° 4) toute fonction rationnelle des racines dont la valeur reste invariable par les substitutions de G, s'exprime rationnellement par ω et, en conséquence, par les quantités connues.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer que le groupe d'une équation est unique. S'il n'en était pas ainsi, soit H un autre groupe jouissant comme G des propriétés du groupe de l'équation. Comme au n° 4, nous pouvons former une fonction rationnelle ω_1 dont la valeur reste invariable par les substitutions de G, mais est changée par toute autre substitution. Cette fonction s'exprimant rationnellement par les quantités connues, sa valeur reste invariable par les substitutions du groupe H, qui par conséquent est contenu dans G.

Mais d'un autre côté, les racines étant inégales, nous pouvons aussi, par un procédé bien connu (voir p. ex. Jordan, *Traité des substitutions*, pag. 255), trouver une fonction rationnelle ω_2 dont non seulement la valeur, mais la forme même reste invariable par les substitutions de H et dont la valeur est changée par toute autre substitution. Par suite de notre hypothèse cette fonction est une quantité rationnelle et par conséquent il faut que sa valeur soit invariable par les substitutions de G. Ces substitutions appartiennent donc aussi au groupe H, et par conséquent les groupes G et H sont identiques, ce qui achève la démonstration du théorème de Galois.

ÜBER DIE BEWEGUNG EINES SCHWEREN PUNCTES AUF EINER ROTATIONSFLÄCHE

VON

OTTO STAUDE
in DORPAT.

Einleitung.

Für eine Gruppe von Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems materieller Puncte hat JACOBI[1] die Integrale in der allgemeinen Form:

$$\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial k}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial k}dq_2\right)=\alpha,$$

$$\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial h}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial h}dq_2\right)=\beta+t$$

angegeben. Hier bedeuten q_1, q_2 die beiden unabhängigen Variabeln, durch welche Ort und Lage des Punctsystems bestimmbar sein sollen, bedeuten h, k, α, β Integrationsconstanten, p_1, p_2 gewisse Functionen von q_1, q_2, h, k und endlich t die Zeit. Wenn mit der Auffindung dieser Gleichungen die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung als solche vollständig erledigt ist, so bleibt das *Umkehrproblem der Integrale* übrig, d. h. die Darstellung der Variabeln q_1, q_2, beziehungsweise gegebener Functionen derselben, durch die Zeit t. Diese Aufgabe scheint selbst für die einfachen Fälle noch nicht allgemein behandelt worden zu sein, wo die Integralgleichungen die Variabeln q_1, q_2 separirt enthalten, also α und $\beta+t$ je einer Summe zweier einfacher Integrale gleich werden.

[1] Vgl. *Vorlesungen über Dynamik*, herausgegeben von CLEBSCH, S. 175, S. 515.

Auf Integralgleichungen, bei denen eine solche Vereinfachung eintritt, führt *die Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche mit verticaler Symmetrieaxe.* Das Umkehrproblem der Integrale der Bewegungsdifferentialgleichungen kann in diesem Falle nur bei einer beschränkten[1] Zahl von Rotationsflächen als Beispiel für die Anwendung der *elliptischen* Functionen behandelt werden;[2] für andere führt es zwar auf *hyperelliptische* Integrale,[3] aber nicht auf ein JACOBI'sches Umkehrproblem, welches mittels der hyperelliptischen Functionen lösbar wäre. Es darf daher die

[1] Es giebt 5 Rotationsflächen, darunter die Kugel, den Kegel und das Rotationsparaboloid, bei denen das Umkehrproblem nur *elliptische* Integrale enthält, nach KOBB, *Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution,* Acta mathematica, Bd. **10**, S. 89, 1887.

[2] Bei der *Kugel* hat das Problem wiederholt ausführliche Behandlung mittels der elliptischen Functionen erfahren, zuerst wohl durch TISSOT, *Mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère,* LIOUVILLE's Journal de mathématiques, 1. Serie, Bd. **17**, S. 88, 1852; vgl. die späteren Darstellungen bei SCHELLBACH, *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen*, Berlin, 1864; DURÈGE, *Theorie der elliptischen Functionen,* Leipzig, 1878; GEELMUYDEN, *Den koniske Pendelbevægelse,* Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. **5**, S. 307, 1881; u. a. Die eine Coordinate (z in der Bezeichnung des § 3 des obigen Textes) des bewegten Punctes auf der Kugel wird unmittelbar eine elliptische Function der Zeit. Die Darstellung der anderen Coordinate (φ in der Bezeichnung d. a. O.) durch die Zeit kommt auf die Darstellung der elliptischen Integrale 3. Gattung durch Thetafunctionen zurück. Auf wesentlich anderem Wege als die genannten Autoren, nämlich unter Vermittlung der LAMÉ'schen Differentialgleichung, gelangt HERMITE, *Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques,* Comptes rendus, Bd. **93**, S. 922, Paris, 1881, zur Entwicklung der 2. Coordinate, bezüglich einer Exponentialfunction derselben. Die gleiche Vermittlung nimmt die Methode von DILLNER, *Sur l'intégration des équations différentielles du pendule conique,* Nova acta societatis scientiarum Upsaliensis, 3. Serie, Bd. **12**, 1883, in Anspruch.

Über *Kegel* und *Paraboloid* liegen verschiedene Bearbeitungen im Sinne der TISSOT'schen Entwicklungen auf Grund der Theorie der elliptischen Functionen vor, vgl. BERTRAM, *Beitrag zur Kenntniss von der Bewegung eines schweren Punctes auf Rotationsflächen mit verticaler Axe,* Archiv der Mathematik und Physik, Th. **59**, S. 193, 1876; E. VOSS, *Bewegung eines schweren Punctes auf der Fläche eines geraden Kegels und eines Rotationsparaboloids,* Schwerin, 1878 (1872); ZÜGE, *Bewegung eines schweren Punctes auf einem Rotationsparaboloid*, Archiv der Mathematik und Physik, Th. **70**, S. 58, 1884.

[3] Vom Geschlecht $p = 2$ für das *Rotationsellipsoid,* vgl. SCHLEIERMACHER, *Über die Bewegung eines schweren Punctes auf dem verlängerten Rotationsellipsoid,* Erlangen, o. J.; vom Geschlecht $p = 3$ für den *Kreisring,* vgl. § 10 des vorliegenden Textes.

Frage nach *der allgemeinen Lösung des Umkehrproblems für alle Rotationsflächen* gerechtfertigt erscheinen, zu welcher die vorliegende Abhandlung einen Beitrag zu geben beabsichtigt.

Die Untersuchung umfasst alle Rotationsflächen, die von einer Horizontalebene in nicht mehr als 2 Parallelkreisen geschnitten werden, unter näher angegebenen Voraussetzungen (§ 3, § 8) und führt zu zwei Hauptresultaten. Das erste derselben besteht in dem Nachweis *einer von der gegebenen Rotationsfläche unabhängigen Rotationsfläche 3. Ordnung* (§ 5), *welche in der Vertheilung ihrer Schnittcurven mit der gegebenen Rotationsfläche den Charakter der Bewegung eines schweren Punctes auf dieser bestimmt* und im Besonderen die Stabilität oder Instabilität der Bewegung entscheidet.[1] Dem anderen Hauptresultate zufolge *sind für die beiden Normalformen* (§ 4, § 9) *jeder stabilen Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche die Coordinaten des Punctes bedingt periodische Functionen der Zeit*, welche durch zweifach unendliche trigonometrische Reihen darstellbar sind. Hierbei ist noch hervorzuheben, dass eine durch ihre Differentialgleichungen 1. Ordnung definirte Bewegung der betrachteten Art, ähnlich wie eine algebraische Curve, *aus mehreren Zweigen* bestehen kann, von denen zwei benachbarte unter Vermittlung von *singulären Bewegungsformen* (§ 6) — etwa einer Curve mit Doppelpunct oder isolirtem Punct entsprechend — auch in einen einzigen Zweig verschmelzen können. Auf specielle Beispiele zur Erläuterung dieser allgemeinen Resultate ist nur in Kürze (§ 7, § 10) eingegangen worden.

Was die analytische Darstellung der Coordinaten des bewegten Punctes angeht, so ist dieselbe eine Anwendung einer allgemeinen, früher[2] von mir betrachteten Gattung von Umkehrfunctionen, auf welche ich hier nur verweise, um bei einer anderen Gelegenheit den analytischen Charakter dieser bedingt periodischen Functionen für alle reellen und auch für einen beschränkten Bereich complexer Werthe der Zeit t darzuthun. Die Hauptsätze über jene Umkehrfunctionen sind in einer für den vorliegenden Zweck erforderlichen Form ihren Anwendungen vorausgeschickt (§ 1, § 2).

---

[1] Vgl. die hiermit verwandten Gesichtspuncte der Untersuchungen von BOHLIN. *Über die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme*, Acta mathematica, Bd. **10**, S. 109, 1887.

[2] Vgl. Mathematische Annalen, Bd. **29**, S. 468.

§ 1. *Über eine Gattung bedingt periodischer Functionen.*

Die anzuwendenden Sätze beziehen sich alle auf das Umkehrproblem:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_{a_1}^{x_1}\frac{g_{11}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{11}(x_1)}}+\int_{a_2}^{x_2}\frac{g_{12}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{12}(x_2)}}&=0\\ \int_{a_1}^{x_1}\frac{g_{21}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{21}(x_1)}}+\int_{a_2}^{x_2}\frac{g_{22}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{22}(x_2)}}&=t\end{aligned}\right.$$

unter verschiedenen Voraussetzungen über die darin auftretenden Functionen.

I. Unter $F_{\alpha\beta}(x_\beta)$, $(\alpha, \beta = 1, 2)$, sind zuerst gegebene Functionen von x_β zu verstehen, welche für je zwei Werthe $x_\beta = a_\beta$ und $x_\beta = b_\beta$ verschwinden. Setzt man mit Rücksicht darauf:

$$(2)\qquad F_{\alpha\beta}(x_\beta) = (x_\beta - a_\beta)(b_\beta - x_\beta)f_{\alpha\beta}(x_\beta),$$

so sollen $f_{\alpha\beta}(x_\beta)$ in den Intervallen

$$(3)\qquad a_\beta \leqq x_\beta \leqq b_\beta$$

eindeutige und stetige Functionen von x_β (eventuell von x_β und

$$w_\beta = \sqrt{\frac{x_\beta - a_\beta}{b_\beta - x_\beta}}\,)$$

sein, daselbst einen beständig positiven reellen Werth besitzen und weder 0 noch ∞ werden. Ferner sollen die Functionen $g_{\alpha\beta}(x_\beta)$ in den Intervallen (3) eindeutige und stetige Functionen von x_β (ev. von x_β und $w_\beta = \sqrt{\frac{x_\beta - a_\beta}{b_\beta - x_\beta}}$) sein, die daselbst ihr Vorzeichen niemals wechseln und niemals ∞ werden. Endlich soll die Determinante:

$$(4)\qquad D(x_1, x_2) = \frac{g_{11}(x_1)}{\sqrt{f_{11}(x_1)}}\,\frac{g_{22}(x_2)}{\sqrt{f_{22}(x_2)}} - \frac{g_{21}(x_1)}{\sqrt{f_{21}(x_1)}}\,\frac{g_{12}(x_2)}{\sqrt{f_{12}(x_2)}}$$

für alle den Ungleichungen (3) genügenden Werthepaare x_β beständig po-

sitiv und von 0 verschieden sein. Die doppeltgestrichenen Wurzelzeichen bedeuten die positiven Werthe der Quadratwurzeln.

Alsdann ist eine gegebene eindeutige Function $E(x_1, x_2)$ der oberen Integralgrenzen x_1, x_2 und der Wurzelfunctionen $\sqrt{x_\beta - a_\beta}$, $\sqrt{b_\beta - x_\beta}$, welche für alle den Ungleichungen (3) genügenden Werthepaare x_1, x_2 endlich und stetig ist, eine für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige, sowie bedingt periodische Function von t. Dieselbe kann durch eine für alle reellen Werthe t gleichmässig convergente Reihe, die zweifach unendliche Fourier'sche Reihe, dargestellt werden.

Die Periodicitätseigenschaft bezieht sich auf die Constanten:

$$\omega_{\alpha\beta} = \int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{g_{\alpha\beta}(x_\beta)\,dx_\beta}{\sqrt{F_{\alpha\beta}(x_\beta)}} \tag{5}$$

$$\left(\text{ev. } \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{g_{\alpha\beta}(x_\beta, \sqrt{w_\beta^2})\,dx_\beta}{\sqrt{F_{\alpha\beta}(x_\beta, \sqrt{w_\beta^2})}} + \frac{1}{2}\int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{g_{\alpha\beta}(x_\beta, -\sqrt{w_\beta^2})\,dx_\beta}{\sqrt{F_{\alpha\beta}(x_\beta, -\sqrt{w_\beta^2})}}\right).$$

Während nämlich die Function $E(x_1, x_2)$ im Allgemeinen nicht periodisch ist, wird sie,[1] falls mit irgend zwei positiven oder negativen, von 0 verschiedenen ganzen Zahlen m_1, m_2 die Bedingung

$$0 = 4m_1\omega_{11} + 4m_2\omega_{12} \tag{6}$$

erfüllt ist, eine periodische Function von t mit der Periode

$$T = 4m_1\omega_{21} + 4m_2\omega_{22}. \tag{7}$$

Enthält $E(x_1, x_2)$ die Wurzelfunctionen $\sqrt{x_\beta - a_\beta}$, $\sqrt{b_\beta - x_\beta}$ nur theilweise oder nur in gewissen Verbindungen oder gar nicht, so tritt in (6) und (7) $2m_1$ an Stelle von $4m_1$ oder $2m_2$ an Stelle von $4m_2$ oder beides zugleich.

Der Beweis dieses Satzes ist a. a. O. von mir gegeben worden; der

[1] Auf die *bedingte Periodicität der hyperelliptischen Functionen zweier Variabler*, wenn beide Variable lineare Functionen einer dritten sind, hat C. Neumann aufmerksam gemacht, *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur*, Journal für Mathematik, Bd. 56, S. 46.

Satz kommt im Folgenden zur Anwendung ohne die in Klammern beigefügten Eventualitäten, welche nur zur Ableitung des unter II folgenden Resultates dienen sollen.

II. Über die Functionen $F_{a1}(x_1)$, $g_{a1}(x_1)$ bleiben die Voraussetzungen unter I bestehen; dagegen sollen die Functionen $F_{a2}(x_2)$ nicht, wie dort, 2 Nullpuncte haben, sondern vielmehr für keinen reellen Werth von x_2 verschwinden. Setzt man im Besonderen:

$$F_{a2}(x_2) = \left(\frac{1 + x_2^2}{2}\right)^2 f_{a2}(x_2), \tag{8}$$

so sollen $f_{a2}(x_2)$ für alle reellen Werthe von x_2, einschliesslich $x_2 = \pm\infty$, eindeutige und stetige Functionen von x_2 sein, einen beständig positiven reellen Werth besitzen und weder 0 noch ∞ werden. Ferner sollen in gleichem Umfange die Functionen $g_{a2}(x_2)$ eindeutig und stetig sein, niemals ihr Vorzeichen wechseln und niemals ∞ werden. Die Voraussetzung über $D(x_1, x_2)$ in (4) bleibt entsprechend beibehalten. Die untere Grenze a_2 in dem Ansatz (1) soll jetzt durch 0 ersetzt werden.

Unter diesen Voraussetzungen ist ebenfalls eine gegebene eindeutige Function $E(x_1, x_2)$ der oberen Integralgrenzen x_1, x_2 in (1) und der Wurzelfunctionen $\sqrt{x_1 - a_1}$, $\sqrt{b_1 - x_1}$, welche für alle den Ungleichungen $a_1 \leqq x_1 \leqq b_1$, $-\infty \leqq x_2 \leqq +\infty$ genügende Werthepaare x_1, x_2 endlich und stetig ist, eine für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige, sowie bedingt periodische Function von t, die wie oben dargestellt werden kann.

Auch die Periodicitätseigenschaften drücken sich wieder durch die Formeln (6) und (7) aus, nur hat ω_{a2} jetzt den Werth:

$$\omega_{a2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{a2}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{a2}(x_2)}}. \tag{9}$$

Der Beweis dieses Satzes II, der a. a. O. noch nicht angegeben wurde, kann dadurch geführt werden, dass man die Voraussetzungen des Satzes auf die dem Satze I zu Grunde liegenden reducirt. Dies geschieht durch die Substitution:

$$x_2^2 = \frac{y_2 - a_2}{b_2 - y_2}, \qquad y_2 = \frac{a_2 + b_2 x_2^2}{1 + x_2^2}, \qquad a_2 < b_2.$$

Es wird dann:

$$\int\limits_0^{x_2} \frac{g_{a2}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{a2}(x_2)}} = \int\limits_0^{x_2} \frac{2g_{a2}(x_2)\,dx_2}{(1+x_2^2)\sqrt{f_{a2}(x_2)}} = \int\limits_{a_2}^{y_2} \frac{g_{a2}(x_2)\,dy_2}{\sqrt{(y_2-a_2)(b_2-y_2)}\sqrt{f_{a2}(x_2)}},$$

wo das Vorzeichen der Wurzel aus $f_{a2}(x_2)$ ohne Beschränkung positiv genommen werden kann. Da nun, während x_2 alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, y_2 immer zwischen a_2 und b_2 oscillirt, und da somit nach den Voraussetzungen unter II die Functionen $g_{a2}(x_2)$ und $f_{a2}(x_2)$ mit $x_2 = \sqrt{\frac{y_2-a_2}{b_2-y_2}}$ für alle der Ungleichung $a_2 \leq y_2 \leq b_2$ entsprechenden Werthe von y_2 eindeutige, endliche und stetige Functionen von $\sqrt{\frac{y_2-a_2}{b_2-y_2}}$ sind, die letztere überdies positiv und von 0 verschieden, die erstere von einerlei Vorzeichen bleiben, so liegt nach der geschehenen Substitution wieder der Fall I mit y_2 für x_2 vor, und zwar treten hierbei die dort in Klammern beigefügten Eventualitäten ein.

III. Die beiden Sätze I und II gelten auch dann noch, wenn identisch $g_{21}(x_1) = 0$ ist, unter den entsprechend specialisirten Bedingungen ihrer allgemeinen Formen. Jedoch ist dann die Function $E(x_2)$, wenn sie von x_2 allein abhängt, eine unbedingt periodische Function von t mit der Periode

$$T = 2\omega_{22}, \tag{10}$$

die durch eine einfach unendliche trigonometrische Reihe von gleichmässiger Convergenz dargestellt wird.[1]

§ 2. *Über Grenzfälle bedingt periodischer Functionen.*

IV. Ist unter sonst gleichen Voraussetzungen, wie unter I, $a_2 = b_2$, so ergiebt eine einfache Grenzbetrachtung mit Benutzung der eben ei-

[1] Nach Weierstrass, *Über eine Gattung reell periodischer Functionen*, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866.

tirten Untersuchung von WEIERSTRASS, dass $x_2 = a_2$, und $E(x_1, a_2)$ eine unbedingt periodische Function von t wird, mit der Periode:

$$(11) \qquad 2\omega = 2\,\frac{A_1\omega_{21} - A_2\omega_{11}}{A_1};$$

bezüglich 4ω, wenn in $E(x_1, a_2)$ auch die Wurzelfunctionen $\sqrt{x_1 - a_1}$, $\sqrt{b_1 - x_1}$ vorkommen; hierin ist:

$$(12) \qquad A_1 = \frac{g_{12}(a_2)}{\sqrt{f_{12}(a_2)}}, \qquad A_2 = \frac{g_{22}(a_2)}{\sqrt{f_{22}(a_2)}}.$$

V. Wenn die Function $F_{a2}(x_2)$ nicht nur ein, sondern zwei Paare aufeinander folgender Nullpuncte $x_2 = a_2, b_2$ und $x_2 = a_2', b_2'$ besitzt $(a_2 < b_2 < a_2' < b_2')$, so können die Bedingungen des Satzes I für die beiden Intervalle $a_2 \leq x_2 \leq b_2$ und $a_2' \leq x_2 \leq b_2'$ unabhängig von einander erfüllt sein. Wenn man daher die untere Grenze a_2 in den Integralen (1) einmal belässt und einmal durch a_2' ersetzt, erhält man entsprechend 2 verschiedene Gruppen bedingt periodischer Functionen $E(x_1, x_2)$.

VI. Wird nun aber unter den Voraussetzungen des Satzes V: $b_2 = a_2'$, so nehmen die Umkehrfunctionen einen wesentlich neuen Charakter an, da die Integrale mit der Variablen x_2 in (1) für $x_2 = b_2$ logarithmisch ∞ werden. Dann bleiben zwar die Functionen $E(x_1, x_2)$ für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige Functionen von t, verlieren aber ihre früheren Periodicitätseigenschaften. Im Besonderen kann die Function x_2 den Werth b_2 für keinen endlichen Werth von t erreichen. Unter der ferneren Voraussetzung $g_{21}(x_1) = 0$ (wie unter III) nähert sich x_2 dem Werthe b_2 mit unbegrenzt wachsendem t asymptotisch.

§ 3. *Gleichungen der Bewegung auf einer Rotationsfläche mit einfachen Horizontalschnitten.*

Die Gleichung einer Rotationsfläche, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit vertical abwärts laufender z-Axe sei:

$$1) \qquad x^2 + y^2 = f^2(z).$$

Die Function $f(z)$ soll innerhalb eines gewissen Intervalles

$$(2) \qquad A < z < B$$

mit näher zu bestimmenden Grenzen A, B eine eindeutige und stetige Function der reellen Variabeln z, sowie von positivem reellen, von 0 und ∞ verschiedenen Werthe sein; sie soll ferner innerhalb desselben Umfanges einen bestimmten, nicht ∞ werdenden 1. Differentialquotienten $f'(z)$ besitzen.

Indem mit φ der Winkel zwischen der Meridianebene eines Punctes der Rotationsfläche und der zx-Ebene des Coordinatensystems bezeichnet wird, können die Coordinaten x, y, z des Punctes durch die Formeln:

$$(3) \qquad x = f(z)\,.\cos\varphi, \qquad y = f(z)\,.\sin\varphi, \qquad z = z$$

als Functionen von z und φ dargestellt werden. Da der Winkel φ in seiner Veränderlichkeit unbeschränkt bleibt, brauchen nur positive Werthe von $f(z)$ in Betracht gezogen zu werden. Durch die Formeln (3) wird die Lage des Punctes x, y, z der Fläche innerhalb des Raumes zwischen den beiden Horizontalebenen $z = A$ und $z = B$ eindeutig bestimmt. In demselben Raume wird die Rotationsfläche von jeder Horizontalebene in einem und nur einem Parallelkreise geschnitten (*einfache Horizontalschnitte*) und hat sie auch mit der z-Axe keinen Punct gemein; in den Grenzen $z = A$ und $z = B$ können die über $f(z)$ und $f'(z)$ gemachten Voraussetzungen durchbrochen werden; es kann hier auch $f(z) = 0$ sowie $f'(z) = \infty$ sein, also die Fläche sich um die z-Axe in einer Spitze oder mit horizontaler Tangentialebene zusammenschliessen.

An Stelle von φ wird fernerhin noch die Variable

$$(4) \qquad v = \sin^2\varphi$$

eingeführt.

Die Differentialgleichungen 1. Ordnung der Bewegung eines schweren Punctes m von der Masse 1 auf der Rotationsfläche lauten bekanntlich:

$$(5) \qquad d\varphi = \frac{k\sqrt{1 + f'^2(z)}\,.\,dz}{f(z)\sqrt{2(gz + h)f^2(z) - k^2}}, \qquad dt = \frac{f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)}\,.\,dz}{\sqrt{2(gz + h)f^2(z) - k^2}}.$$

Dabei ist g die Beschleunigung der Schwere, h die Constante der le-

bendigen Kraft und k die doppelte Flächengeschwindigkeit der auf die Horizontalebene projicirten Bewegung; k wird von o verschieden vorausgesetzt und kann ohne Beschränkung als positiv angenommen werden.

Die Abhängigkeit der Coordinaten x, y, z des Punctes m von der Zeit t findet hiernach ihren Ausdruck in den 5 Gleichungen:

$$(6) \qquad x = f(z) \cdot \sqrt{1 - v}, \qquad y = f(z) \cdot \sqrt{v}, \qquad z = z,$$

$$(7) \quad \left| \begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{z_0}^{z} \frac{k\sqrt{\overline{\overline{1 + f'^2(z)}}} \,.\, dz}{f(z)\sqrt{2(gz + h)f^2(z) - k^2}} = 0. \\[2ex] \displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{f(z)\sqrt{\overline{\overline{1 + f'^2(z)}}} \,.\, dz}{\sqrt{2(gz + h)f^2(z) - k^2}} = t, \end{array} \right.$$

welche nur eine andere Form der Gleichungen (3) und (5) sind und die Form des allgemeinen Umkehrproblems der obigen Einleitung haben. Bei der über $f'(z)$ gemachten Voraussetzung ist es, so lange z in dem Intervalle (2) bleibt, keine Beschränkung, wenn die Quadratwurzel aus $1 + f'^2(z)$ positiv angenommen wird, was durch die doppelten Striche bezeichnet ist. Die Werthe $z = z_0$ und $v = 0$, $\sqrt{1 - v} = 1$ sollen die dem Zeitpunct $t = 0$ entsprechenden Anfangswerthe sein (vgl. § 5).

§ 4. *Normalform der stabilen Bewegung auf einer Rotationsfläche mit einfachen Horizontalschnitten.*

Innerhalb des in (2) bezeichneten Intervalles sind die Functionen

$$g_{12} = \frac{k\sqrt{\overline{\overline{1 + f'^2(z)}}}}{f(z)}, \qquad g_{22} = f(z)\sqrt{\overline{\overline{1 + f'^2(z)}}}$$

eindeutig und stetig, positiv und von o und ∞ verschieden. Setzt man daher voraus — eine Voraussetzung, die in § 5 näher zu erörtern ist —, dass die Function:

$$(8) \qquad R(z) = 2(gz + h)f^2(z) - k^2$$

die Form habe:

$$(9) \qquad R(z) = (z - z_0)(z_1 - z)r(z),$$

wo mit Ausschluss der Gleichheit:

$$(10) \qquad A < z_0 < z_1 < B,$$

und wo $r(z)$ für das Intervall:

$$(11) \qquad z_0 \leqq z \leqq z_1$$

positiv und von o verschieden ist, so erfüllen die Gleichungen (6) und (7) alle Bedingungen des Satzes § 2, I in der besonderen Form § 2, III. Man hat in die allgemeinen Sätze des § 2 neben den bereits angegebenen Functionen g_{12} und g_{22} die Functionen:

$$g_{11} = -\frac{1}{2}, \quad g_{21} = 0, \quad F_{11} = F_{21} = v(1 - v), \quad F_{12} = F_{22} = R(z)$$

$$E(x_1, x_2) = f(z) \cdot \sqrt{1 - v}; \quad f(z) \cdot \sqrt{v}; \quad z$$

und die Constanten:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = z_0, \quad b_2 = z_1$$

einzuführen. Die Periodicitätsconstanten erhalten die Werthe:

$$(12) \quad \left| \begin{array}{ll} \omega_{11} = -\displaystyle\int_0^1 \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} = \frac{\pi}{2}, & \omega_{12} = \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} \frac{k\sqrt{1 + f'^2(z)} \, . \, dz}{f(z)\sqrt{R(z)}}, \\ \omega_{21} = 0, & \omega_{22} = \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} \frac{f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)} \, dz}{\sqrt{R(z)}}. \end{array} \right.$$

Während daher z eine eindeutige, unbedingt periodische Function von t ist mit der Periode:

$$T = 2\omega_{22},$$

sind x, y eindeutige, bedingt periodische Functionen von t, welche unter der Bedingung:[1]

$$4m_1\frac{\pi}{2}+2m_2\omega_{12}=0$$

die Periode

$$T=2m_2\omega_{22}$$

erhalten. Die Function z ist durch eine einfach, die Functionen x, y durch zweifach unendliche trigonometrische Reihen darzustellen, die für alle reellen Werthe von t gleichmässig convergiren.

Die Bewegung des Punctes m ist auf die zwischen den beiden Parallelkreisen $z=z_0$ und $z=z_1$ gelegene Zone beschränkt und schreitet in der Längsdimension derselben immer in gleichem Sinne fort, indem die Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}k$ der auf die Horizontalebene projicirten Bewegung constant bleibt. Dabei berührt die Bahncurve des Punctes m periodisch abwechselnd den obern und untern die Zone begrenzenden Parallelkreis, weshalb diese letzteren *Wendekreise* der betrachteten Bewegung genannt werden mögen.

Die Wendekreise $z=z_0$ und $z=z_1$ sind durch die beiden in (9) vorausgesetzten Nullpuncte der Function $R(z)$ bestimmt, über deren Existenzfrage der § 5 weiteren Aufschluss geben soll.

§ 5. *Die Rotationsfläche der Wendekreise der Bewegung.*

Denkt man sich die Constanten h und $\frac{1}{2}k$ der lebendigen Kraft und der Flächengeschwindigkeit in der Horizontalebene gegeben, so bleibt, für die durch die Differentialgleichungen (5) definirte Bewegung, noch der Anfangsort $z=z_0$, $\varphi=\varphi_0$ des bewegten Punctes m willkürlich. Bei der Symmetrie der Rotationsfläche kann, wie in (7) geschehen, ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\varphi_0=0$ gesetzt werden, während für z_0

[1] Vgl. die Untersuchungen von DARBOUX über die Bedingung geschlossener Bahnen eines Punctes auf einer Rotationsfläche in der Abhandlung: *Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution*, Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 5, S. 100, 1877.

entweder, wie in (7) mit Rücksicht auf (9), ein Nullpunct von $R(z)$ oder auch ein anderer Werth gesetzt werden darf, der einem von der Bewegung überhaupt getroffenen Parallelkreis entspricht.

Da nämlich nach (5) von den Coordinaten des Anfangsortes z_0, φ_0 und den Constanten h, k die Coordinaten $z' = z'_0$, $\varphi' = \varphi'_0$ der Anfangsgeschwindigkeit mittels der Gleichungen:

$$(13) \qquad z_0'^2 = \frac{R(z_0)}{[1 + f'^2(z_0)]f^2(z_0)}, \qquad \varphi'_0 = \frac{k}{f^2(z_0)}$$

abhängen, so muss $z = z_0$ der Bedingung:

$$(14) \qquad R(z) \geqq 0$$

genügen. Diese Bedingung bestimmt innerhalb der Grenzen $A < z < B$ die bei gegebenem h und k für den Punct m erreichbaren Parallelkreise der Rotationsfläche, während alle der Bedingung nicht entsprechende Stellen unerreichbar bleiben.

In einer Halbmeridianebene nehme man ein Coordinatensystem mit den Axen r, z an, wo z die bereits eingeführte, der Richtung der Schwere folgende z-Axe und r die Durchschnittslinie der Halbmeridianebene mit der horizontalen xy-Ebene des bisherigen Coordinatensystems sei. Die Gleichung der Durchschnittslinie der Rotationsfläche mit der Halbmeridianebene ist:

$$(15) \qquad r = f(z),$$

wo r nur positive Werthe annimmt. Man kann nun die Gleichung:

$$(16) \qquad R(z) = 0,$$

auf deren Wurzeln es ankommt, als Resultat der Elimination von r aus der Gleichung (15) und der Gleichung

$$(17) \qquad r = \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}}$$

ansehen, wo nach Voraussetzung $k > 0$ ist. Demnach sind die Nullpuncte der Function $R(z)$ die z-Coordinaten der Durchschnittspuncte der beiden Curven (15) und (17). Dies von der Halbmeridianebene mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ auf den Raum übertragen, giebt den Satz:

Die Wendekreise der Bewegung des Punctes m auf der Rotationsfläche § 3, 1 *sind die Schnittkreise der letzteren mit der Rotationsfläche 3. Ordnung:*

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2(gz + h)}. \tag{18}$$

Zur Discussion dieser Rotationsfläche (h, k), welche durch die Parameter h, k charakterisirt ist, bedarf es nur der Betrachtung der Halbmeridiancurve (17), die einen Zweig einer Curve 3. Ordnung darstellt. Der andere, den negativen Werthen der Quadratwurzel entsprechend, ist für den vorliegenden Zweck ersichtlich ohne Belang. Die Curve (17) befindet sich in der Halbebene r, z ganz unterhalb der horizontalen Geraden $z = -\frac{h}{g}$, welche eine Asymptote der Curve ist. Eine zweite Asymptote der Curve ist die verticale z-Axe. Die Curve besteht aus einem einzigen, horizontal vom Unendlichen her und vertical in's Unendliche hinablaufenden Zuge, der jede unterhalb des Niveau's $z = -\frac{h}{g}$ die Halbebene r, z durchziehende horizontale oder verticale Gerade einmal und nur einmal trifft. Da ferner in dem betrachteten Umfange $\frac{dr}{dz} < 0$ und $\frac{d^2r}{dz^2} > 0$, so nimmt bei wachsendem z die horizontale Coordinate der Curve von ∞ bis 0 beständig ab, und bewegt sich der Winkel α der abwärts laufenden Curventangente gegen die horizontale r-Axe (vgl. Fig. 1) beständig abnehmend von π bis $\frac{\pi}{2}$. Es ist überdies für alle unterhalb der Curve (auf der concaven Seite derselben) gelegenen Puncte r, z der Halbmeridianebene:

$$r > \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}},$$

für alle oberhalb der Curve und unterhalb der Geraden $z = -\frac{h}{g}$ gelegenen umgekehrt.

Die Systeme von Curven, welche bei veränderlichem k und constantem h oder bei veränderlichem h und constantem k entstehen, sind leicht zu übersehen. Denn der Veränderung von h bei festem k entspricht eine blose Verschiebung der Curve in der Richtung der z-Axe. Will man

dagegen aus der Curve (h, k) die Curve (h, k') erhalten, so braucht man nur die horizontalen Coordinaten r der ersteren mit $k':k$ zu multipliciren (Systeme der letzteren Art vgl. Fig. 2 und Fig. 3).

Lässt man jetzt die Curve (h, k) um die z-Axe rotiren, so beschreibt sie die Rotationsfläche (h, k), welche sich trichterförmig nach oben gegen die Ebene $z = -\frac{h}{g}$ öffnet und nach unten immer enger um die z-Axe zusammenschliesst. Für alle Puncte unterhalb dieser Fläche ist

$$2(gz + h)(x^2 + y^2) - k^2 > 0$$

und für alle Puncte oberhalb derselben diesseits und jenseits der Ebene $z = -\frac{h}{g}$ umgekehrt. Daraus folgt aber weiter:

Für einen Parallelkreis der gegebenen Rotationsfläche

$$x^2 + y^2 = f^2(z)$$

ist

$$R(z) > 0, = 0 \quad \text{oder} \quad < 0,$$

jenachdem derselbe unterhalb, auf oder oberhalb der Rotationsfläche (h, k) liegt.

Die Rotationsfläche (h, k), welche, unabhängig von der gegebenen Rotationsfläche, nur von den Constanten der Schwerkraft (g), der lebendigen Kraft (h) und der horizontalen Flächengeschwindigkeit $\left(\frac{1}{2}k\right)$ abhängt, trennt also einerseits die für die Bewegung erreichbaren und unerreichbaren Puncte der gegebenen Rotationsfläche und bestimmt andererseits in ihren innerhalb des Raumes $A < z < B$ gelegenen Schnittcurven mit dieser die möglichen Wendekreise der Bewegung.

Mit $g = 0$ geht sie in einen verticalen Kreiscylinder, verbunden mit der Ebene $z = \infty$ über; mit $k = 0$ in die z-Axe und die Ebene $z = -\frac{h}{g}$.

§ 6. *Formen der Bewegung auf einer Rotationsfläche mit einfachen Horizontalschnitten.*

Verbindet man dieses Resultat mit der in § 4 über $R(z)$ gemachten Voraussetzung (9), so übersicht man, wenn dieselbe mit ihren Folgen

besteht und wenn nicht. Soll nämlich eine den Differentialgleichungen (5) entsprechende Bewegung innerhalb des Intervalles (2) überhaupt möglich sein, so darf die gegebene Rotationsfläche in dem letzteren nicht ganz oberhalb der Rotationsfläche (h, k) liegen, ohne dieselbe zu treffen. Dagegen:

I. *Ragt die gegebene Rotationsfläche innerhalb des Intervalles* $A < z < B$ *mit einer Zone in den Raum unterhalb der Rotationsfläche* (h, k) *hinein, und ist diese Zone von 2 Parallelkreisen,* $z = z_0$ *nach oben und* $z = z_1$ *nach unten, begrenzt, in denen sich beide Rotationsflächen schneiden, ohne sich zu berühren, so findet in dieser Zone eine den Differentialgleichungen (5) entsprechende, bedingt periodische Bewegung des Punctes m mit den Wendekreisen* $z = z_0$ *und* $z = z_1$ *statt.*

Es liegt die in § 4 behandelte Normalform der Bewegung vor; denn den einfachen Schnittkreisen der beiden Flächen entsprechen einfache Nullpuncte $z = z_0, z_1$ der Function $R(z)$, zwischen denen nach § 5 die Function $R(z)$ positiv und von 0 verschieden ist, während $r(z)$ (vgl. § 4, 9) zwischen und in den Grenzen $z = z_0, z_1$ diese Eigenschaften besitzt.

II. *Reicht die gegebene Rotationsfläche innerhalb der Grenzen* $A < z < B$ *mit mehreren solchen Zonen unter die Rotationsfläche* (h, k) *herab, so besteht die den Differentialgleichungen (5) entsprechende Bewegung aus mehreren bedingt periodischen Zweigen.*

Jeder dieser Zweige ist von der erwähnten Normalform des § 4, wie aus § 2, V unmittelbar hervorgeht.

III. *Fallen die beiden Wendekreise eines solchen bedingt periodischen Zweiges der Bewegung zusammen, so geht die entsprechende bedingt periodische Bewegung in eine unbedingt periodische Bewegung über.*

Dieselbe erfolgt dem Satze § 2, IV entsprechend, auf einem Parallelkreise $z = z_0$ der Rotationsfläche mit constanter Geschwindigkeit. Diese periodische Bewegung ist *stabil*, da ihre Bahn beiderseits von unerreichbaren Theilen der Rotationsfläche begrenzt ist. Für die Periode der Bewegung ergiebt die allgemeine Formel § 2, 11:

19) $$T = \frac{2\pi}{k} f^2(z_0).$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch anders darstellen. Denn die Annahme $z = z_0$, $z' = 0$ reducirt die Gleichungen § 5, 13 auf:

$$(20) \qquad R(z_0) = 0, \qquad k = f^2(z_0) \cdot \varphi_0'.$$

Da aber bei dem Zusammenfall der beiden Wendekreise z_0 und z_1 nach § 4, 9 auch

$$(20) \qquad R'(z_0) = 0,$$

so können mittels dieser 3 Gleichungen (20) h, k und φ_0' durch z_0 ausgedrückt werden. Man erhält dabei für k den Werth:

$$k = f(z_0)\sqrt{-g\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}}.$$

Es wird daher nach (19) *die Umlaufszeit der längs des Parallelkreises* $z = z_0$ *stattfindenden periodischen Bewegung:*

$$(21) \qquad T = 2\pi\sqrt{-\frac{f(z_0)f'(z_0)}{g}}.$$

Mit $f(z) = \sqrt{a^2 - z^2}$ und $f(z) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - z^2}$ liefert diese Formel die bekannten Perioden der Bewegung längs eines Parallelkreises $z = z_0$ der Kugel und des Rotationsellipsoides:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}}, \text{[1]} \qquad T = 2\pi\frac{b}{a}\sqrt{\frac{z_0}{g}}. \text{[2]}$$

IV. *Fallen zwei nächstfolgende Wendekreise zweier verschiedener bedingt periodischer Zweige der Bewegung zusammen, so entsteht durch das Zusammenfliessen der letzteren eine asymptotische Bewegung.*

Die Bahncurve des Punctes m flacht sich nach § 2, VI bei Annäherung an den kritischen Parallelkreis, der aus dem Zusammenfall der beiden Wendekreise hervorgeht, derart ab, dass sie, während sie der

[1] Vgl. SCHELL, *Theorie der Bewegung und der Kräfte.* Bd. 1, S. 425. (2. Aufl.)

[2] Vgl. FOUCAULT, *Remarques concernant le mouvement d'un point oscillant circulairement sur une surface de révolution du second ordre.* Comptes rendus, Bd. 61, S. 515. Paris 1865; und *Sur une modification du modérateur de* WATT, ebd. S. 278.

Richtung des letzteren folgend, in immer neuen Windungen die Rotationsfläche umkreist, sich dem kritischen Parallelkreis asymptotisch nähert. Auf diese Weise wird die im kritischen Parallelkreis mögliche Verzweigung der Bahncurve umgangen.[1] Bringt man aber den Punct m zu Anfang der Bewegung in diesen Parallelkreis hinein, so wird er ihn umgekehrt nach keiner endlichen Zeit verlassen können, sondern ihn mit constanter Geschwindigkeit umkreisen. Die so entstehende unbedingt periodische Bewegung unterscheidet sich aber von der vorhin als stabil bezeichneten dadurch, dass sie nur im *labilen* Gleichgewicht steht. Ihre Periode ist dieselbe, wie die vorhin unter (21) angegebene. Die Grenzfälle III und IV der bedingt periodischen Bewegung setzen eine *Berührung zwischen der gegebenen Rotationsfläche und der Rotationsfläche* (h, k) *längs eines Parallelkreises* voraus. Solche Berührungen können, da die Fläche (h, k) sich nach unten zu beständig gegen die z-Axe *verengt*, nur auf solchen Zonen der gegebenen Fläche auftreten, wo das gleiche stattfindet; dem entsprechend giebt die Formel (21), da $f(z)$ allgemein positiv vorausgesetzt wurde, nur *für negatives* $f'(z_0)$ einen reellen Werth. Ist längs einer solchen Zone mit negativem $f'(z)$ die gegebene Rotationsfläche positiv gekrümmt, so kann sie die Rotationsfläche (h, k) niemals von unten berühren, also nur der Grenzfall der stabil periodischen Bewegung eintreten. Ist sie dagegen negativ gekrümmt, wie die Rotationsfläche (h, k) selbst, so sind beide Grenzfälle, die stabil und die labil periodische Bewegung möglich (vgl. § 10).

V. Analoge Grenzfälle bedingt periodischer Bewegungen, wie die eben unter III und IV beschriebenen, finden sich bei der Coincidenz von mehr als zwei Schnittkreisen der gegebenen Rotationsfläche mit der Rotationsfläche (h, k) ein, deren Discussion kein weiteres Interesse beanspruchen dürfte. Jedoch soll noch des *vollständigen Zusammenfalles der beiden Rotationsflächen*, also der Voraussetzung

$$f(z) = \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}} \tag{22}$$

gedacht werden. Wenn der Punct m an einer beliebigen Stelle dieser

[1] Denn nach KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik*, 1. Vorl., § 2, sind die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes für die Dauer der Bewegung einwerthige Functionen der Zeit.

Rotationsfläche in horizontaler Richtung mit der Flächengeschwindigkeit k seine Bewegung beginnt, so verbleibt er immer in dem anfänglichen Parallelkreis. Es liegt eine periodische Bewegung vor, deren Gleichgewichtszustand ein indifferenter ist.

Diese Eigenschaft führt auf folgende *mechanische Definition* des einem gegebenen h und einem veränderlichen k entsprechenden Systems von Rotationsflächen (h, k), wie es bereits im § 5 erwähnt wurde:

Wenn von einer beliebigen Stelle irgend eines Parallelkreises $z = z_0$ einer Rotationsfläche des Systems ein schwerer Punct in der Richtung der Tangente des Parallelkreises mit derjenigen Geschwindigkeit ausgeht, die er durch den freien Fall vom Niveau $z = -\frac{h}{g}$ bis zum Niveau des Parallelkreises $z = z_0$ erhalten haben würde, so bewegt er sich beständig in diesem Parallelkreis.

Denn die Differentialgleichung der in die yz-Ebene fallenden Meridiancurve einer Rotationsfläche, auf welcher ein schwerer Punct immer einen Parallelkreis beschreibt, wenn er in einem beliebigen Niveau z von einer beliebigen Stelle der Fläche mit der als Function von z gegebenen und in die Richtung des Parallelkreises z fallenden Geschwindigkeit $\nu = \nu(z)$ ausgeht, ist:[1]

$$gy + \nu^2(z) \cdot \frac{dy}{dz} = 0.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung mit $\nu^2(z) = 2(gz + h)$, giebt aber, unter k die Integrationsconstante verstanden, das in Rede stehende System:

$$y = \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}}.$$

VI. Neben den unter I—V betrachteten und in verschiedenem Sinne stabilen Bewegungszweigen können auch *instabile Zweige* vorhanden sein, wenn nämlich eine Zone der gegebenen Rotationsfläche, die unter die

[1] Vgl. JULLIEN, *Problèmes de mécanique rationnelle*, Bd. 1, S. 401, Paris 1855; über die Tendenz dieser Frage auch DE ST.-GERMAIN, *Des surfaces sur lesquelles un point peut se mouvoir suivant une certaine loi*, LIOUVILLE's Journal de mathématiques, 3. Serie, Bd. 2, S. 325, 1876.

Fläche (h, k) herabreicht, innerhalb des Intervalles $A < z < B$ nur einseitig begrenzt ist. Auf diese Zweige soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

Mit $g = 0$ ergeben sich aus den Sätzen I—VI *die verschiedenen Formen der geodätischen Bewegung* eines Punctes auf einer Rotationsfläche, mit Ausschluss der Bewegung in einem Meridiane.

Wie die Bestimmung des Intervalles $A < z < B$ für eine gegebene Rotationsfläche gedacht ist, wird aus den folgenden Beispielen leicht ersichtlich sein.

§ 7. *Beispiele von Bewegungen auf Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten.*

Um die bekannten Beispiele von Bewegungen eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche unter die allgemeine Theorie unterzuordnen, mag zuerst die *Kugelfläche* erwähnt werden. Es ist hier:

$$f(z) = \sqrt{a^2 - z^2},$$

wo unter a der Radius der Kugel verstanden wird. Die Grenzen A und B des § 3, 2 können $A = -a$ und $B = +a$ genommen werden, worauf $f(z)$ allen Bedingungen des § 3 entspricht. Die Rotationsfläche (h, k) schneidet, wenn überhaupt eine Bewegung stattfindet, die Kugel in 2 Parallelkreisen $z = z_0, z_1$ (vgl. Fig. 1), die auch zu einer Berührungscurve beider Flächen zusammenrücken können, jedoch nach § 6 nur auf der unteren Halbkugel. Während daher im Allgemeinen die Bewegung aus einem einzigen bedingt periodischen Zweige besteht, wird sie im Grenzfalle stabil periodisch.

Im Wesentlichen dieselben Verhältnisse wiederholen sich bei allen *geschlossenen Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten,* wenn sie zwischen ihren beiden Schnittpuncten mit der Rotationsaxe überall den Bedingungen des § 3 entsprechen und, in der verticalen Halbebene yz, der Winkel der absteigenden Tangente der Halbmeridiancurve der Rotationsfläche gegen die Richtung der Halbaxe y, beständig wachsend von 0 bis π sich bewegt. Da nämlich der Winkel der absteigenden Tangente der Halbmeridiancurve der Rotationsfläche (h, k) gegen die Richtung der

Halbaxe y beständig abnehmend von π bis $\frac{\pi}{2}$ sich bewegt (nach § 5), so können die beiden Meridiancurven sich nicht mehr als zweimal schneiden; sie müssen sich aber, wenn überhaupt, auch wenigstens in 2 getrennten oder zusammenfallenden Puncten treffen.

Bei dem *Rotationskegel* mit verticaler Axe ist für den oberen Halbkegel, dessen aufsteigende Seitenlinie mit der z-Axe den stumpfen Winkel γ bildet:

$$f(z) = \operatorname{tg}\gamma . z.$$

Man kann $A = -\frac{h}{g}$, $B = 0$ nehmen, indem man h als positiv voraussetzt. Kleinere Werthe von z sind unerreichbar, sodass die Annahme $A = -\frac{h}{g}$ keine Beschränkung enthält. Der obere Halbkegel wird von der Rotationsfläche (h, k), wenn überhaupt, in 2 Parallelkreisen $z = z_0', z_1'$ (vgl. Fig. 1) geschnitten, die eventuell auch zusammenfallen. Auf den unteren Halbkegel übergehend, hätte man

$$f(z) = -\operatorname{tg}\gamma . z$$

und $A = 0$, $B = \infty$ zu nehmen. Es findet sich dann nur ein Schnittkreis $z = z_2'$ zwischen Halbkegel und Rotationsfläche (h, k) und liegt daher ein instabiler Zweig der Bewegung vor (vgl. § 6, VI).

Im Wesentlichen ebenso, wie der nach oben offene Halbkegel, verhalten sich alle *unten geschlossenen und oben offenen Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten,* wenn sie zwischen dem Niveau $z = -\frac{h}{g}$ und ihrem tiefer liegenden Schnittpunct mit der Rotationsaxe überall den Bedingungen des § 3 genügen und der Winkel der absteigenden Tangente der Halbmeridiancurve gegen die Richtung der Halbaxe y beständig wachsend von einem zwischen 0 und π gelegenen Anfangswerthe bis π sich bewegt. Sie werden, wenn überhaupt, von der Rotationsfläche (h, k) unterhalb des Niveau's $z = -\frac{h}{g}$ in zwei getrennten oder zusammenfallenden Puncten geschnitten.

Ein Beispiel für den Fall, wo *zwei bedingt periodische Zweige* der Bewegung möglich sind, bietet die durch Rotation der Fusspunctcurve einer Ellipse

$$(y^2 + z^2)^2 - (a^2y^2 + b^2z^2) = 0$$

entstehende Fläche unter der Voraussetzung:

$$2a^2 < b^2.$$

Die Gleichung der Halbmeridiancurve ist:

$$y = f(z) = \sqrt{(a^2 - 2z^2) + \sqrt{a^4 + 4(b^2 - a^2)z^2}}.$$

Die Function erfüllt innerhalb der Grenzen $A = -b$ und $A = +b$ alle Bedingungen des § 3. Bei geeigneter Wahl der Constanten h werden dann mit stetiger Abnahme der Constanten k der Reihe nach folgende Formen der Bewegung auftreten.

Solange die Fläche (h, k) die gegebene Fläche in 2 Parallelkreisen $z = z_0$ und $z = z_3$ schneidet, die respective in der Nähe von $z = -b$ und $z = +b$ liegen (vgl. Fig. 2, 1) besteht die Bewegung aus einem einzigen bedingt periodischen Zweige (Normalform des § 4). Sobald zu den beiden Schnittkreisen $z = z_0$ und $z = z_3$ noch eine Berührung beider Flächen in einem zwischen jenen liegenden Parallelkreis $z = z_1 = z_2$ tritt, liegt die in § 6, IV betrachtete asymptotische Bewegung vor, die auch als labil periodische Bewegung längs des letztgenannten Parallelkreises betrachtet werden kann. Indem weiterhin die beiden Flächen in 4 Parallelkreisen $z = z_0$, $z = z_1$, $z = z_2$, $z = z_3$ sich schneiden (vgl. Fig. 2, 2) zerfällt die Bewegung in 2 bedingt periodische Zweige auf den Zonen $z_0 < z < z_1$ und $z_2 < z < z_3$. Beim Zusammenfall von z_0 und z_1 wird sodann der obere Zweig stabil periodisch. Weiterhin verschwindet er ganz, und es bleibt (vgl. Fig. 2, 3) nur mehr ein bedingt periodischer Zweig mit den Wendekreisen $z = z_2$ und $z = z_3$ übrig, der seinerseits in eine stabil periodische Bewegung übergeht, wenn die beiden Wendekreise zusammenrücken.

§ 8. *Gleichungen der Bewegung auf einer Rotationsfläche mit zweifachen Horizontalschnitten.*

Die Gleichung einer Rotationsfläche sei mit Bezug auf dasselbe Coordinatensystem, wie in § 3, wiederum:

$$x^2 + y^2 = f^2(z), \tag{1}$$

jedoch soll die Function $f(z)$ die Form haben:

$$(23) \qquad f(z) = p(z) + \sqrt{q(z)},$$

und soll für jeden Werth von z in dem Intervalle

$$(24) \qquad a \leqq z \leqq b$$

2 im Allgemeinen verschiedene positive reelle Werthe haben, die nur an den beiden Grenzen $z = a$ und $z = b$ des Intervalles zusammenfallen. Diese Eigenschaft von $f(z)$ soll dadurch bedingt sein, dass die Function $q(z)$ die Form hat:

$$(25) \qquad q(z) = (z - a)(b - z)\, r(z),$$

und dass die Functionen $p(z)$ und $r(z)$ für alle der Ungleichung (24) entsprechenden Werthe von z eindeutige und stetige Functionen der reellen Variabeln z sind und einen positiven reellen, von 0 und ∞ verschiedenen Werth besitzen. Auch sollen diese Functionen in demselben Umfange einen bestimmten, nicht ∞ werdenden 1. Differentialquotienten $p'(z)$ und $q'(z)$ besitzen. Endlich soll in dem betrachteten Intervalle:

$$(26) \qquad p(z) > \sqrt{q(z)}$$

sein. Die Rotationsfläche ist dann eine *geschlossene Ringfläche*, welche von jeder Horizontalebene zwischen $z = a$ und $z = b$ in 2 getrennten Parallelkreisen geschnitten und von den Ebenen $z = a$ und $z = b$ selbst längs eines solchen berührt wird.

Die Differentialgleichungen (5) für die Bewegung eines schweren Punctes m auf der Fläche haben jetzt in dem Intervalle $a \leqq z \leqq b$ insofern einen andern Charakter wie früher in dem Intervall § 3, 2, als $f^2(z)$ nicht mehr eindeutig und $f'(z)$ nicht mehr überall von ∞ verschieden ist. Sie können aber auf eine der früheren analoge Form gebracht werden durch die Substitution

$$(27) \qquad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u;$$

es wird dann:

$$\sqrt{q(z)} = \sqrt{(z-a)(b-z)}\,\sqrt{r(z)} = -\frac{a-b}{2}\sin u \,.\, \sqrt{r(z)}, \qquad dz = -\frac{a-b}{2}\sin u\, du.$$

Dieses Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Variabeln z und u ist derart, dass, während u alle möglichen reellen Werthe durchläuft, z immer zwischen a und b oscillirt. Es ist daher bei den gemachten Voraussetzungen:

$$(28)\quad f(z) = p\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u\right) - \frac{a-b}{2}\sin u \sqrt{r\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u\right)} = F(u)$$

eine eindeutige und stetige Function von u, die immer positiv und von 0 und ∞ verschieden ist. Ferner wird:

$$(29)\qquad 1 + f'^2(z) = \frac{q(z) + \left(p'(z)\sqrt{q(z)} + \frac{1}{2}q'(z)\right)^2}{(z-a)(b-z)r(z)} = \frac{G(u)}{(z-a)(b-z)},$$

wo $G(u)$ für alle reellen Werthe von u nicht nur eindeutig und stetig, sondern auch positiv und von 0 und ∞ verschieden ist. Da nämlich

$$(30)\qquad G(u) = [1 + f'^2(z)](z-a)(b-z),$$

so ist für alle Werthe von u, für die $a < z < b$, $G(u)$ positiv und von 0 verschieden; für solche Werthe von u aber, für die $z = a, b$ wird, ist

$$G(u) = \frac{1}{4}\frac{q'^2(z)}{r(z)}$$

ebenfalls positiv und von 0 verschieden. Da ferner für $a \leq z \leq b$ weder $r(z)$ verschwindet noch $q(z)$, $p'(z)$, $q'(z)$ ∞ werden können, so ist nach (29) $G(u)$ für alle reellen Werthe von u endlich.

Wenn aber $G(u)$ diese Eigenschaften hat, so wird in dem Differential:

$$\sqrt{1 + f'^2(z)}\,dz = \sqrt{G(u)}\,du$$

der Coefficient von du bei stetiger Bewegung von u niemals sein Vorzeichen wechseln und kann daher ohne Beschränkung demselben sein positiver Werth beigelegt werden.

Hiernach nehmen die analytischen Gleichungen der Bewegung des Punctes m auf der Ringfläche zunächst folgende unentwickelte Form an:

$$(31)\qquad x = F(u)\cdot\sqrt{1-v}, \qquad y = F(u)\cdot\sqrt{v}, \qquad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u,$$

$$(32)\qquad \begin{cases} -\int\limits_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int\limits_{u_0}^u \frac{k\sqrt{G(u)}\,du}{F(u)\sqrt{R(u)}} = 0, \\[2ex] \int\limits_{u_0}^u \frac{F(u)\sqrt{G(u)}\cdot du}{\sqrt{R(u)}} = t, \end{cases}$$

worin:

$$(33)\qquad R(u) = 2(gz+h)f^2(z) - k^2 = 2\left[g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u\right) + h\right]F^2(u) - k^2.$$

Man kann überdies für u in den Gleichungen (31) und (32) auch die Variable w einführen, indem man setzt:

$$(34)\qquad \cos u = \frac{1-w^2}{1+w^2}, \qquad \sin u = \frac{2w}{1+w^2}, \qquad du = \frac{2dw}{1+w^2},$$

worauf $F(u)$, $G(u)$, $R(u)$ eindeutige Functionen von w werden, etwa $F_1(w)$, $G_1(w)$, $R_1(w)$ und die Gleichungen (31) und (32) die Gestalt annehmen:

$$(31')\qquad x = F_1(w)\cdot\sqrt{1-v}, \qquad y = F_1(w)\cdot\sqrt{v}, \qquad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\,\frac{1-w^2}{1+w^2},$$

$$(32')\qquad \begin{cases} -\int\limits_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int\limits_{w_0}^w \frac{2k\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)F_1(w)\sqrt{R_1(w)}} = 0, \\[2ex] \int\limits_{w_0}^w \frac{2F_1(w)\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)\sqrt{R_1(w)}} = t; \end{cases}$$

u_0 und w_0 sind die der Zeit $t = 0$ entsprechenden Anfangswerthe von u und w.

Auf analoge Form würden sich die Bewegungsgleichungen für die nach oben offenen und nach unten geschlossenen Ringflächen mit theils zweifachen theils einfachen Horizontalschnitten bringen lassen; jedoch

bietet diese Untersuchung nichts wesentlich verschiedenes von der eben geführten dar.

§ 9. *Die beiden Normalformen der stabilen Bewegung auf einer Rotationsfläche mit zweifachen Horizontalschnitten.*

In den Formeln (31) sind x, y, z für alle reellen Werthe von u und alle v zwischen 0 und 1 eindeutige Functionen von $u, \sqrt{v}, \sqrt{1-v}$; ferner gilt in demselben Umfange von den Functionen:

$$g_{11} = -\frac{1}{2}, \qquad g_{12} = \frac{k\sqrt{G(u)}}{F(u)},$$

$$g_{21} = 0, \qquad g_{22} = F(u)\sqrt{G(u)}$$

in (32), dass sie eindeutig und endlich sind und ihr Vorzeichen niemals wechseln. Hat nun die Function $R(u)$ zwei Nullpuncte u_0 und u_1, sodass $R(u) = (u - u_0)(u_1 - u)r(u)$ in dem Intervalle zwischen u_0 und u_1 positiv und von 0 verschieden ist, so ist auch die Determinante:

$$D = -\frac{1}{2}\frac{F(u)\sqrt{G(u)}}{\sqrt{r(u)}}$$

in diesem Intervalle von 0 verschieden und constanten Vorzeichens. Es sind daher, wie früher, x, y eindeutige, bedingt periodische Functionen und z eine eindeutige periodische Function von t. Die Bewegung entspricht der Normalform des § 4.

Wird dagegen $R(u) = R_1(w)$ für keinen reellen Werth von w gleich 0 und ist für alle Werthe von w positiv und endlich, so bieten die Formeln (31′) und (32′) den Fall des Umkehrproblems § 1, II dar mit:

$$f_{a2} = R_1(w), \qquad D = -\frac{1}{2}\frac{F_1(w)\sqrt{G_1(w)}}{\sqrt{R_1(w)}},$$

$$\omega_{11} = \frac{\pi}{2}, \qquad \omega_{12} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2k\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)F_1(w)\sqrt{R_1(w)}},$$

$$\omega_{21} = 0, \qquad \omega_{22} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2F_1(w)\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)\sqrt{R_1(w)}}.$$

Es wird daher wieder z eine periodische Function von t mit der Periode $T = 2\omega_{22}$ und x, y bedingt periodische Functionen, die unter der Bedingung:

$$4m_1 \frac{\pi}{2} + 2m_2\omega_{12} = 0$$

die Periode $T = 2m_2\omega_{22}$ bekommen. Geometrisch kann indessen die entsprechende Bewegung als eine zweite Normalform der Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche betrachtet werden, welche sich von jener des § 4 durch das Fehlen der Wendekreise unterscheidet. Der Punct macht volle Umläufe um die Ringfläche sowohl im Sinne der Parallel- als im Sinne der geschlossenen Halbmeridiancurven.

Die Untersuchung der Form der Bewegung des Punctes reducirt sich nach dem Vorstehenden wiederum auf die Aufsuchung der Nullpuncte der Function:

$$R(u) = R_1(w) = 2(gz + h)f^2(z) - k^2,$$

also der Schnittkreise der gegebenen Rotationsfläche mit der Rotationsfläche (h, k) des § 5. Es gelten also unmittelbar die Sätze.

I. *Ragt die gegebene ringförmige Rotationsfläche mit einer Zone in den Raum unterhalb der Rotationsfläche* (h, k) *hinein und ist diese Zone von zwei Parallelkreisen begrenzt, in denen sich die beiden Rotationsflächen schneiden, ohne sich zu berühren, so findet in dieser Zone eine den Differentialgleichungen* (5) *entsprechende bedingt periodische Bewegung des Punctes* m *statt.*

Auch hier können mehrere bedingt periodische Zweige der Bewegung vorhanden sein und die früher (§ 6) erwähnten Grenzfälle der stabil und labil periodischen Bewegung auftreten.

II. *Liegt die gegebene ringförmige Rotationsfläche ganz unterhalb der Rotationsfläche* (h, k) *ohne mit ihr einen Punct gemein zu haben, so ist die den Differentialgleichungen* (5) *entsprechende Bewegung eine bedingt periodische Bewegung ohne Wendekreise mit zweierlei vollen Umläufen.*

In diesem Falle besteht die Bewegung naturgemäss nur aus einem Zweige. Der *Übergang von dieser Form der bedingt periodischen Bewegung zu einer solchen mit Wendekreisen* findet unter Vermittlung einer *asymptotischen* Bewegung statt, wenn die Ringfläche ganz unterhalb der Fläche (h, k) liegt, aber dieselbe in einem Parallelkreis berührt.

§ 10. *Beispiel des Kreisringes.*

Für die Ringfläche:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

sind die in § 8 mit $f(z)$, $p(z)$, $q(z)$, $r(z)$ bezeichneten Functionen

$$f(z) = a + \sqrt{b^2 - z^2}, \qquad p(z) = a, \qquad q(z) = (z + b)(b - z), \qquad r(z) = 1$$

und die dortigen Constanten a, b durch $-b$, b zu ersetzen. Die Bedingung (26) wird:

$$a > b.$$

Die Gleichungen der Bewegung lauten, wenn man statt des in § 8 eingeführten u noch $\pi - u$ setzt:

$$x = (a + b\sin u)\sqrt{1 - v}, \qquad y = (a + b\sin u)\sqrt{v}, \qquad z = b\cos u;$$

$$-\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int^u \frac{kb\,du}{(a + b\sin u)\sqrt{R(u)}} = 0,$$

$$\int_{u_0}^u \frac{b(a + b\sin u)\,du}{\sqrt{R(u)}} = t;$$

$$R(u) = 2(bg\cos u + h)(a + b\sin u)^2 - k^2.$$

Die Werthe $u = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ entsprechen bezüglich dem tiefsten, dem äussersten, dem höchsten und dem innersten Parallelkreis der Ringfläche, sodass der 1. und 2. *Quadrant in Bezug auf* u die positiv, der 3. und 4. die negativ gekrümmten Theile der Fläche umfasst.

Durch die Substitution (34) werden die Integrale mit der Variabeln u auf die algebraische Form gebracht; sie sind *hyperelliptisch vom Geschlecht* $p = 3$.

Die Discussion der Schnittcurven der Ringfläche mit der Rotationsfläche (h, k) ergiebt nun ohne Schwierigkeit: Wenn die Ringfläche von

der Rotationsfläche (h, k) geschnitten wird, was für $-bg < h < bg$ immer stattfindet und auch für $h > bg$ (dem Falle $h < -bg$ entspricht keine Bewegung) noch stattfinden kann, so giebt es jedenfalls unerreichbare Theile der Ringfläche. Es sind entweder 2 oder 4 Wendekreise vorhanden und besteht daher die Bewegung aus einem oder zwei Zweigen, welche bedingt periodische Bewegungen von der Normalform des § 4 sind.

Wenn dagegen die Ringfläche ganz unterhalb der Rotationsfläche (h, k) verläuft, so liegt die zweite Normalform der bedingt periodischen Bewegungen vor und macht der Punct m volle Umläufe im Sinne der Parallelkreise sowohl, wie im Sinne der Meridiankreise der Ringfläche.

Wenn das Zerfallen der Bewegung in 2 Zweige möglich ist (wie z. B. für die der Fig. 3 zu Grunde gelegte Annahme $a = b\sqrt{2}$, $h = \frac{3}{2}\frac{bg}{\sqrt{2}}$), so gestaltet sich der Übergang der einzelnen Formen ineinander folgendermaassen:

Zuerst wenn die Ringfläche ganz unterhalb der Rotationsfläche (h, k) liegt, (vgl. Fig. 3, 1) findet die *bedingt periodische Bewegung ohne Wendekreise* statt. Sobald alsdann die letztere Fläche die unter ihr liegende Ringfläche in einem Parallelkreise des 3. Quadranten berührt, löst sich die Bewegung in eine *asymptotische Form* auf, die dem fraglichen Parallelkreis immer näher kommt, ohne ihn je zu erreichen. Bei weiterer Abnahme von k schneidet die Fläche (h, k) bereits eine Zone unerreichbarer Puncte aus der Ringfläche aus, während die Bewegung auf der andern, unterhalb der Fläche (h, k) gelegenen Zone *bedingt periodisch mit 2 Wendekreisen* ist. Weiterhin berührt die Fläche (h, k), während sie noch immer den Ring in 2 Parallelkreisen schneidet, denselben gleichzeitig in einem 3. Parallelkreis der bisher der Bewegung zugänglichen Zone, sodass die Bewegung sich abermals in eine *asymptotische* auflöst. Bei 4 Schnittkreisen der beiden Flächen zerfällt hierauf die Bewegung in *zwei bedingt periodische Zweige* mit je 2 Wendekreisen. Die Zone des einen Zweiges liegt ganz im 3. Quadranten, die des anderen greift über den 1. Quadranten herum und nähert sich beiderseits der ersteren Zone. Bei abnehmendem k fallen die beiden Wendekreise der ganz im 3. Quadranten belegenen Zone zusammen (vgl. Fig. 3, 2) und die Bewegung besteht aus *einem stabil periodischen und einem bedingt periodischen Zweige*. Der erstere verschwindet alsdann und es bleibt, indem nur mehr zwei

Schnittkreise der beiden Flächen vorliegen nur *ein bedingt periodischer Zweig* (vgl. Fig. 3, 3), dessen beide Wendekreise sich mehr und mehr von verschiedenen Seiten her gegen den 1. Quadranten hinziehen. In diesem fallen sie schliesslich zusammen und eine *stabil periodische Durchlaufung* des betreffenden Parallelkreises, in welchem die Rotationsfläche (h, k) den ganz oberhalb liegenden Ring berührt, erscheint als letzte Grenzform der Bewegung.

Dorpat, im Februar 1888.

Staude, Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche.

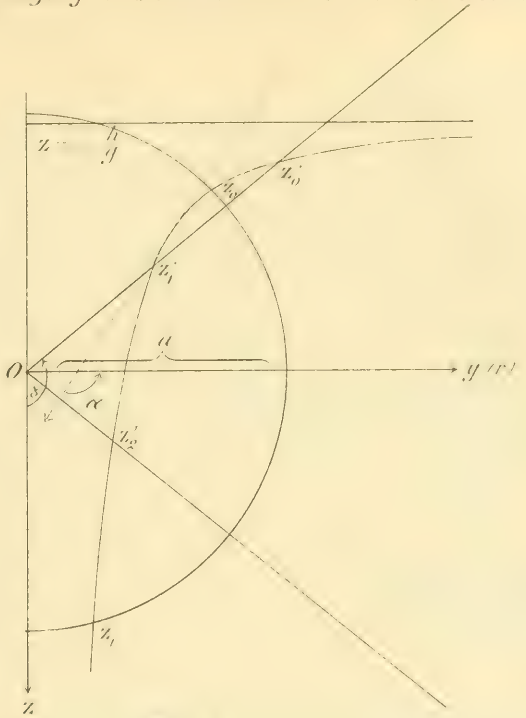


Fig. 1.

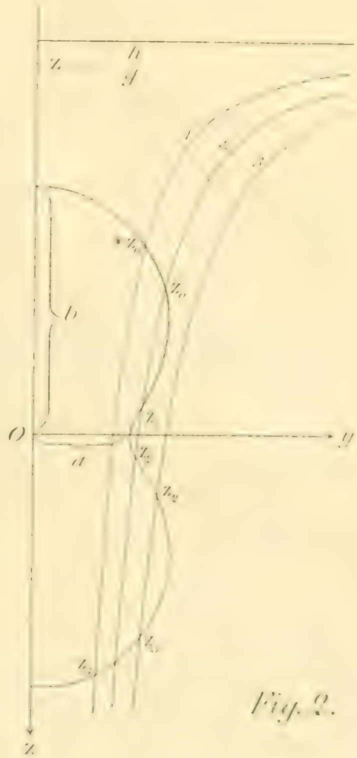


Fig. 2.

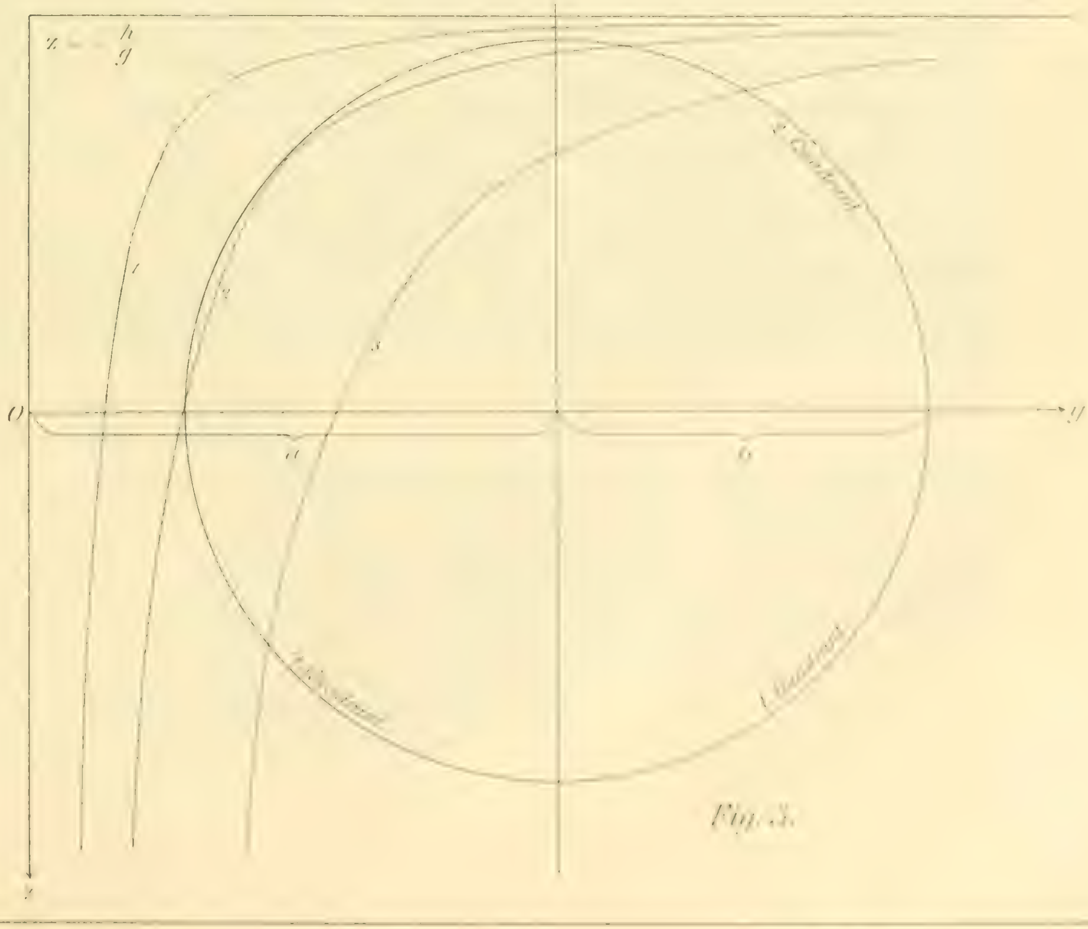


Fig. 3.

ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

(Zweite Abhandlung[1])

VON

H. WEBER
in MARBURG.

Nach längerer Unterbrechung setze ich meine in dieser Zeitschrift begonnenen Publicationen aus der Theorie der elliptischen Functionen fort. Ich beginne mit einigen Betrachtungen über die allgemeine Transformationstheorie, besonders die Modulargleichungen, welche den Zweck haben, die Formeln dieser Theorie unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt zu betrachten und dieselben teils zu erweitern, teils zu vereinfachen. Diese Untersuchungen berühren sich mit den Arbeiten, die in den letzten Jahren von F. Klein und einigen seiner Schüler veröffentlicht sind.[2] Im zweiten Teile der vorliegenden Arbeit werden diese Formeln angewandt auf die Berechnung der aus der complexen Multiplication entspringenden algebraischen Zahlen (der sogenannten singulären Moduln), mit Anwendung verschiedenartiger Methoden. Einige dieser algebraischen Zahlen finden sich in den einschlagenden Arbeiten von Hermite,[3] Joubert,[4]

[1] Acta Mathematica, Bd. 6, S. 329. Die mit I bezeichneten Citate beziehen sich auf diese Abhandlung.

[2] Man vgl. die sehr dankenswerten Übersichten, die F. Klein in den Berichten der Sächsischen Gesellschaft d. Wissensch. (2 März 1885) und in den Mathematischen Annalen (Bd. 26) über diese Untersuchungen und ihren Zusammenhang gegeben hat. Von besonderem Interesse war mir die Dissertation von E. W. Fiedler, die im Jahr 1885 der phil. Facultät der Universität Leipzig vorgelegt wurde, in welcher sich viele der von mir benutzten Formeln wenn auch in anderer Form finden.

[3] Hermite, *sur la théorie des équations modulaires*, Paris 1859.

[4] Joubert, Comptes rendus 1860, t. 50.

Kronecker.[1] Die von mir angewandten Methoden, die alle bisher bekannten Fälle umfassen, vermehren dies Material bedeutend und geben die Resultate meist in überraschend einfacher Gestalt. Die Rechnungen lassen sich auf denselben Wegen noch weiter fortsetzen. Bezüglich dieser Rechnungen bemerke ich noch, dass dieselben, mit Ausnahme der in § 8 behandelten Fälle, nicht wie bei Hermite und Kronecker auf numerischen Rechnungen, sondern auf algebraischen Umformungen beruhen, dass aber trotzdem vielfach die numerische Rechnung, die bei der enormen Convergenz der in Betracht kommenden Reihen sehr leicht ist, teils zur Controlle der Richtigkeit, teils zur leichteren Auffindung rationaler Factoren mit Nutzen angewandt wird.

I. ABSCHNITT.

Zur Transformationstheorie.

§ 1. *Einführung der Functionen $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$.*

In der Abhandlung I, § 6, habe ich als absolute Invariante eines Systems doppelt periodischer Functionen mit den Perioden $1, \omega$ die Function

$$j(\omega) = 2^8 \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{k^4 k'^4} \tag{1}$$

eingeführt, deren Entwicklung nach steigenden Potenzen von q den folgenden Anfang hat

$$j(\omega) = q^{-2}(1 + 744 q^2 + \dots). \tag{2}$$

Hierin ist, wenn ω das Periodenverhältniss bedeutet

$$q = e^{\pi i \omega}.$$

Von derjenigen Function, welche Dedekind (Journal für Mathematik, Bd. 83) die Valenz von ω nennt, die mit der von F. Klein als absolute

[1] Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie, 26 Juni 1862.

Invariante $J(\omega)$ bezeichneten Function übereinstimmt, unterscheidet sie sich durch einen Zahlenfactor, so dass $j(\omega) = 27.64 J(\omega)$ ist. Der Grund, der mich zu dieser Abweichung von der sonst schon gebräuchlichen Bezeichnung, zu der ich mich ungern entschloss, bewog, war der, dass die der complexen Multiplication entsprechenden singulären Werte von $j(\omega)$ *ganze* algebraische Zahlen sind, was für $J(\omega)$ nicht der Fall ist. Derselbe Umstand hat mich auch zu den folgenden Einführungen bewogen, welche sich übrigens auch sonst als zweckmässig erweisen.

An Stelle der Invarianten g_2, g_3 (I, § 6) benutze ich die von ihnen durch Zahlenfactoren verschiedenen Functionen

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
\gamma_2(\omega) &= 3\sqrt[3]{4}\,g_2(\omega) = \sqrt[3]{j(\omega)} &&= q^{-\frac{2}{3}}(1 + 248q^2 + \ldots),\\
\gamma_3(\omega) &= 54 g_3(\omega) = \sqrt{j - 27.64} &&= q^{-1}(1 - 492q^2 + \ldots),
\end{aligned}
$$

und an Stelle der Hermite'schen Functionen $\varphi(\omega), \psi(\omega), \chi(\omega)$ (I, § 4) sollen drei Functionen $f(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega)$ eingeführt werden, welche mit denselben in folgendem Zusammenhang stehen:

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
f(\omega) &= \frac{\sqrt[6]{2}}{\chi(\omega)} &&= \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{kk'}}\\
f_1(\omega) &= \frac{\sqrt[6]{2}\,\psi(\omega)}{\chi(\omega)} &&= \sqrt[6]{2}\,\sqrt[12]{\frac{k'^2}{k}}\\
f_2(\omega) &= \frac{\sqrt[6]{2}\,\varphi(\omega)}{\chi(\omega)} &&= \sqrt[6]{2}\,\sqrt[12]{\frac{k^2}{k'}}.
\end{aligned}
$$

Diese drei Functionen lassen sich in folgender Weise durch die Function $\eta(\omega)$ darstellen:

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
f(\omega) &= e^{-\frac{\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)},\\
f_1(\omega) &= \frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)},\\
f_2(\omega) &= \sqrt{2}\,\frac{\eta(2\omega)}{\eta(\omega)}
\end{aligned}
$$

Führt man hier das unendliche Product

$$(6)\qquad \eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}}\prod_{1,\infty}^{\nu}(1 - q^{2\nu})$$

ein, so erhält man

$$f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}}\prod_{1,\infty}^{\nu}(1 + q^{2\nu-1}),$$

$$(7)\qquad f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}}\prod_{1,\infty}^{\nu}(1 - q^{2\nu-1}),$$

$$f_2(\omega) = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{12}}\prod_{1,\infty}^{\nu}(1 + q^{2\nu}),$$

woraus die Reihen:

$$f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}}(1 + q + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + 2q^8 + 2q^9 + 2q^{10} + 2q^{11} + \ldots),$$

$$(8)\quad f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}}(1 - q - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + 2q^8 - 2q^9 + 2q^{10} - 2q^{11} + \ldots),$$

$$f_2(\omega) = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{12}}(1 + q^2 + q^4 + 2q^6 + 2q^8 + 3q^{10} + \ldots).$$

Zwischen den drei Functionen $f(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega)$ bestehen die aus (4) sich ergebenden beiden Relationen

$$(9)\qquad f(\omega)f_1(\omega)f_2(\omega) = \sqrt{2},$$

$$(10)\qquad f(\omega)^8 = f_1(\omega)^8 + f_2(\omega)^8.$$

Die Invariante $\gamma_2(\omega)$ lässt sich durch $f(\omega)$ in der Weise ausdrücken

$$(11)\qquad \gamma_2(\omega) = \frac{f^{24} - 16}{f^8},$$

so dass $f^8, -f_1^8, -f_2^8$ die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3 - x\gamma_2(\omega) - 16 = 0$$

sind, deren Discriminante $4\gamma_3(\omega)^2$ ist, woraus

$$(12)\qquad \gamma_3(\omega) = \frac{1}{2}[f(\omega)^8 + f_1(\omega)^8][f(\omega)^8 + f_2(\omega)^8][f_1(\omega)^8 - f_2(\omega)^8]$$

$$= \frac{[f(\omega)^{24} + 8][f_1(\omega)^8 - f_2(\omega)^8]}{f(\omega)^8}.$$

Mittels der Formeln (5) erhält man (nach I, § 5, 7, 8) die zur Transformation erster und zweiter Ordnung gehörigen Fundamentalformeln

$$(13)\qquad \begin{aligned} f(\omega + 1) &= e^{-\frac{\pi i}{24}} f_1(\omega), \\ f_1(\omega + 1) &= e^{-\frac{\pi i}{24}} f(\omega), \\ f_2(\omega + 1) &= e^{\frac{\pi i}{12}} f_2(\omega). \end{aligned}$$

$$(14)\qquad \begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f(\omega), \\ f_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f_2(\omega), \\ f_2\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f_1(\omega). \end{aligned}$$

$$(15)\qquad \begin{aligned} f_2(\omega) f_1(2\omega) &= \sqrt{2}, \\ f_1(\omega) f_2\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \sqrt{2}, \\ f(\omega) f_2\left(\frac{\omega + 1}{2}\right) &= e^{\frac{\pi i}{24}} \sqrt{2}, \\ f(\omega) f\left(\frac{\omega - 1}{\omega + 1}\right) &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ich führe noch die Formeln für die allgemeine lineare Transformation der Functionen f, f_1, f_2 an, die man aus den bekannten HERMITE'schen Formeln für die Transformation der Functionen φ, ψ, χ erhält, die sich aber auch (wie in I, § 5 angedeutet) leicht mittels der Transformation der Function $\eta(\omega)$ aus (5) herleiten lassen.[1] Ich gebe diese Formeln tabellarisch, indem in der ersten Colonne die nach dem Modul 2 reducierten

[1] Vgl. MOLIEN, *Über gewisse in der Theorie der elliptischen Functionen auftretende Einheitswurzeln.* Berichte der Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., 1885.

Transformationszahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stehen wonach sechs mögliche Fälle zu unterscheiden sind.

(16)

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$	$f\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right)$	$f_1\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right)$	$f_2\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right)$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\rho\left(\frac{2}{\alpha\delta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta-\gamma\delta)}f(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_1(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_2(\omega)$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\rho\left(\frac{2}{\gamma\beta}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta-\gamma\delta)}f(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\gamma}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_2(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\beta}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_1(\omega)$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_2(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_1(\omega)$	$-\rho e^{\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f(\omega)$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\gamma}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_1(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\gamma}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_2(\omega)$	$-\rho e^{-\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f(\omega)$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_1(\omega)$	$-\rho e^{-\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_2(\omega)$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\beta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_2(\omega)$	$-\rho e^{\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\beta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_1(\omega)$

$$\rho = e^{-\frac{2i\pi}{3}(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\delta-\alpha\beta^2\gamma)}. \tag{17}$$

Für die lineare Transformation von γ_2, γ_3 erhält man

$$\begin{aligned} \gamma_2\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) &= \rho\gamma_2(\omega), \\ \gamma_3\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) &= (-1)^{\alpha\beta+\gamma\delta+\beta\gamma}\gamma_3(\omega). \end{aligned} \tag{18}$$

Als Ergänzung der Sätze am Schluss von Abhandlung I, § 7, ergiebt sich noch als unmittelbare Folgerung jener Sätze (n° 1)

1.) *Wenn eine Function von ω, als Function von k^2 überall einen algebraischen Character hat, und durch die beiden Substitutionen*

$$(\omega, \omega + 2), \left(\omega, -\frac{1}{\omega}\right)$$

ungeändert bleibt, so ist sie eine rationale Function von $f(\omega)^{24}$.

2.) *Bleibt eine solche Function ungeändert durch die Substitutionen*

$$(\omega\,,\,\omega + 2r)\,,\,\left(\omega\,,\,-\frac{1}{\omega}\right)$$

worin r *ein Teiler von* 24 *und* $rr_1 = 24$ *ist, so ist sie eine rationale Function von* $f(\omega)^{r_1}$.

Denn bezeichnen wir eine solche Function mit $\varphi(\omega)$ und setzen

$$\varepsilon = e^{\frac{-2\pi i s r_1}{24}}$$

so ist nach 1.) für jedes ganzzahlige s

$$f(\omega)^{sr_1}\{\varphi(\omega) + \varepsilon\varphi(\omega + 2) + \varepsilon^2\varphi(\omega + 4) + \ldots + \varepsilon^{r-1}\varphi[\omega + 2(r - 1)]\}$$

eine rationale Function von $f(\omega)^{24}$.

§ 2. *Die Transformation n^{ten} Grades.*

Ist n eine beliebige positive ganze Zahl und

(1) $$n = ad$$

irgend eine Zerlegung derselben in zwei Factoren, ferner c eine nach dem Modul a genommene Zahl, so dass a, d, c keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so sind die Grössen

(2) $$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

deren Anzahl, wenn p die sämmtlichen in n aufgehenden von einander verschiedenen Primzahlen durchläuft

(3) $$\nu = n\prod\left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

ist, die Wurzeln einer Gleichung ν^{ten} Grades, deren Coëfficienten rationale Functionen von $j(\omega)$ sind, der *Invariantengleichung* (I, § 16).

Diese Thatsache ergiebt sich sehr einfach aus der Bemerkung, dass durch die Substitutionen

$$(4)\qquad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} = (\omega, \omega + 1),$$

$$(5)\qquad \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = \left(\omega, \frac{-1}{\omega}\right),$$

die ν Grössen (2) nur unter einander vertauscht werden. Es ist nämlich

$$(6)\qquad \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \lambda, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & 0 \\ c', & d \end{pmatrix},$$

wenn

$$(7)\qquad c' = c + d - \lambda a,$$

und

$$(8)\qquad \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix},$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

wenn

$$(9)\qquad \begin{array}{ll} \alpha a' + \beta c' = 0, & \beta d' = a, \\ \gamma a' + \delta c' = -d, & \delta d' = c. \end{array}$$

Hiernach ist d' als grösster gemeinschaftlicher Teiler von a und c, und dadurch wegen $a'd' = n$ auch a' bestimmt, und dann ergiebt sich c' aus der Congruenz

$$(10)\qquad cc' \equiv -dd' \pmod{n}.$$

Aus (9) folgt sodann

$$(11)\qquad \begin{array}{lll} \alpha d = -c', & \beta d' = a, & \beta d = a', \\ -\gamma n = cc' + dd', & \delta d' = c, & \end{array}$$

und d ist der grösste gemeinschaftliche Teiler von a', c'.

Hieraus schliesst man, dass die Grössen (2) durch die Substitutionen (4), (5) nur unter einander vertauscht, und die symmetrischen Functionen

derselben nicht geändert werden. Letztere sind daher rationale Functionen von $j(\omega)$ w. z. b. w.

Die Invariantengleichung ist irreducibel in dem Sinne, dass sie sich nicht in Factoren niedrigeren Grades zerlegen lässt, deren Coëfficienten rationale Functionen von $j(\omega)$ sind, wie man am einfachsten aus der folgenden Zusammensetzung von Transformationen n^{ter} Ordnung erkennt.

Man bestimme bei gegebenen a, c, d die Zahl x so, dass

$$\alpha = ax + c, \qquad \beta = d$$

ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, und dann γ, δ so dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Es ist dann

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & , & 1 \\ d\gamma - c\delta, & a\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}, \tag{12}$$

und daraus folgt, dass durch die Substitution

$$\left(\omega, \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right),$$

welche $j(\omega)$ ungeändert lässt, $j(n\omega)$ in

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

übergeht. Wenn also eine rationale Function von u und $j(\omega)$ für $u = j(n\omega)$ verschwindet, so verschwindet dieselbe auch für die sämmtlichen Grössen (2), und da letztere von einander verschieden sind, so ist damit die Irreducibilität bewiesen.

Wenn nun irgend ein System von ν Functionen von ω vorliegt, entsprechend den ν Zahlensystemen a, c, d, die wir, da bei festgehaltenem n durch a die Zahl d mitbestimmt ist, mit

$$\Phi_{a,c}$$

bezeichnen, welche ebenso wie die Functionen (2) durch die Substitutionen (4), (5) in $\Phi_{a',c'}$ permutiert werden, so sind dies gleichfalls die Wurzeln einer Gleichung ν^{ten} Grades, welche rational von $j(\omega)$ abhängt, und es lässt sich $\Phi_{a,c}$ rational durch

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right) \text{ und } j(\omega)$$

ausdrücken. Letzteres folgt in bekannter Weise daraus, dass für jedes ganzzahlige r die Summe

$$\sum \Phi_{a,c}\, j\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)^r$$

durch die Substitutionen (4), (5) ungeändert bleibt, und daher eine rationale Function von $j(\omega)$ ist.

Die Werte von $\Phi_{a,c}$ sind entweder alle von einander verschieden und dann ist die betreffende Gleichung irreducibel, oder sie zerfallen in Gruppen von gleich viel unter einander gleichen.

Indem wir diese Transformationsprincipien auf die Functionen f, f_1, f_2 anwenden, setzen wir n als ungerade voraus, und nehmen was alsdann freisteht

$$c \equiv 0 \pmod{16}, \tag{13}$$

und wenn n nicht durch 3 teilbar ist

$$c \equiv 0 \pmod{48} \tag{14}$$

an, was natürlich auch für die aus (7), (10) bestimmten Zahlen c' gelten soll.

Wird zur Abkürzung

$$\begin{array}{lll} f(\omega) = u, & f_1(\omega) = u_1, & f_2(\omega) = u_2, \\ f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right) = v, & \left(\frac{2}{a}\right) f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right) = v_1, & \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right) = v_2 \end{array} \tag{15}$$

gesetzt, so erhält man mit Benutzung der linearen Transformationsformeln § 1 (16), wenn man auf die Änderungen des Zahlensystems a, d, c, wie sie durch (7), (9), (10) characterisiert sind, in der Bezeichnung keine Rücksicht nimmt, folgende zusammengehörige Vertauschungen:

$$\begin{array}{llllllll} \omega & ; & u, & u_1, & u_2; & v, & v_1, & v_2, \\ -\frac{1}{\omega} & ; & u, & u_2, & u_1; & \rho v, & \rho v_2, & \rho v_1, \\ \omega + 1 & ; & e^{-\frac{\pi i}{24}} u_1, & e^{-\frac{\pi i}{24}} u, & e^{\frac{\pi i}{12}} u_2; & \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v_1, & \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v, & \sigma e^{\frac{n\pi i}{12}} v_2. \end{array} \tag{16}$$

worin ρ, σ dritte Einheitswurzeln sind, welche, *falls n nicht durch 3 teilbar ist, den Wert 1 haben.*

Hieraus schliessen wir nun durch eine Wiederholung der letzten Substitution (16), gestützt auf den Satz am Schlusse des § 1, dass die drei Reihen von je ν Grössen

$$(17) \qquad f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \left(\frac{2}{a}\right)f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \left(\frac{2}{d}\right)f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)$$

falls n nicht durch 3 teilbar ist, die Wurzeln je einer Gleichung ν^{ten} Grades sind, deren Coëfficienten rational von $f(\omega)$ resp. $f_1(\omega), f_2(\omega)$ abhängen. Ist der Transformationsgrad n aber durch 3 teilbar, so kommt diese Eigenschaft den Cuben der Grössen (17) zu. Ebenso ergiebt sich, wenn r ein Divisor von 24 ist, eine solche Gleichung für

$$f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)^r,$$

deren Coëfficienten rational von $f(\omega)^r$ abhängen. Diese Gleichungen wollen wir die Schläfli'schen Modulargleichungen nennen. (Schläfli, Journal für Mathematik, Bd. 72.)

§ 3. *Princip zur Aufstellung von Transformationsgleichungen.*

Wir betrachten im Folgenden, immer unter Voraussetzung eines ungeraden n, rationale Functionen $\Phi_{a,c}$ der sechs Grössen

$$(1) \qquad f(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega), f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \left(\frac{2}{a}\right)f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \left(\frac{2}{d}\right)f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right),$$

welche durch die Substitutionen

$$(2) \qquad \left(\omega, -\frac{1}{\omega}\right), (\omega, \omega+1)$$

in einander übergehen, und demnach Wurzeln von Transformationsgleichungen sind, welche rational von $j(\omega)$ abhängen.

Diese Gleichungen sind, wie oben gezeigt, entweder irreducibel oder Potenzen von irreducibeln Gleichungen.

Sind die $\Phi_{a,c}$ *ganze* rationale Functionen der Grössen (1) oder enthalten sie im Nenner nur Potenzen dieser Grössen (1), so wird keine von

ihnen für einen *endlichen* Wert von $j(\omega)$ unendlich, und dieselben sind also *ganze algebraische* Functionen von $j(\omega)$, d. h. wenn in der Transformationsgleichung, deren Wurzeln die $\Phi_{a,c}$ sind, der Coëfficient der höchsten Potenz der Unbekannten $= 1$ ist, so sind die übrigen Coëfficienten dieser Gleichung *ganze* rationale Functionen von $j(\omega)$.

Richtet man nun die Functionen $\Phi_{a,c}$ durch geeignete Bestimmung gewisser Constanten so ein, dass sie für $q = 0$ endlich bleiben, so werden dieselben auch für ein unendliches $j(\omega)$ alle endlich bleiben, die Coëfficienten jener Gleichung werden mithin constant und *die Functionen $\Phi_{a,c}$ selbst sind alle einer und derselben Constanten gleich.*

Auf diese Weise ist man dann zur Aufstellung einer Transformationsgleichung gelangt, wenn auch nicht in expliciter Form.

Bezüglich der Bildung solcher Functionen $\Phi_{a,c}$ gelten die folgenden Bemerkungen.

1.) Hat man zwei dieser Functionen Φ, die wir in der Folge immer mit A, B bezeichnen, so ist jede ganze rationale Function von A, B ebenfalls eine solche Function Φ, und man kann die gesuchte Modulargleichung in Gestalt einer rationalen Gleichung zwischen A, B aufstellen. Denn da A, B algebraische Functionen von einer Variablen, $j(\omega)$, sind, so lässt sich durch Elimination von $j(\omega)$ immer eine solche Gleichung zwischen A, B herleiten. Damit aber diese Gleichung eine wirkliche Transformationsgleichung, nicht eine Identität sei, ist selbstverständlich erforderlich, dass aus den Functionen A, B sich nicht die sämmtlichen Variablen (1), wenn man sie als unabhängig oder nur durch die zwischen den Functionen f, f_1, f_2 bestehenden Relationen verbunden betrachtet, eliminieren lassen.

2.) Wenn n keinen quadratischen Teiler hat, so hat man nur dafür zu sorgen, dass die Functionen $\Phi_{a,0}$ für $q = 0$ endlich bleiben, denn daraus folgt durch Vermehrung von ω um eine ganze Zahl die Endlichkeit der übrigen.

3.) Ist n eine Primzahl, und hat die Function $\Phi_{a,c}$ die Eigenschaft durch Vertauschung von

$$f(\omega), \qquad f_1(\omega), \qquad f_2(\omega)$$

mit

$$f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \quad \left(\frac{2}{a}\right) f_1\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \quad \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

ungeändert zu bleiben, so genügt der Nachweis der Endlichkeit von $\Phi_{1,0}$, woraus durch Vertauschung von ω mit $\omega:n$ die Endlichkeit von $\Phi_{n,0}$ und daraus nach 1. die der übrigen folgt.

4.) Es ist nicht immer erforderlich, dass die in n° 1.) erwähnten Functionensysteme A, B durch die Substitutionen (2) vollständig ungeändert bleiben. Dieselben können auch Einheitswurzeln als Factoren annehmen, wenn nur solche Producte $A^h B^k$ benutzt werden, in welchen diese Einheitswurzeln dieselben sind. Man erhält alsdann ein Functionensystem $\Phi_{a,c}$ in der Form

$$\sum M_{h,k} A^h B^k,$$

welches die Eigenschaft hat, dass eine Potenz desselben durch die Substitutionen (2) ungeändert bleibt, worauf man die obigen Schlüsse ungeändert anwenden kann. Die weiter unten folgenden Beispiele werden dies Verfahren klar legen.

§ 4. *Die Schläfli'schen Modulargleichungen.*

Wenn die Transformationsgleichung, welcher die Functionen $\Phi_{a,c}$ genügen, nicht von $j(\omega)$, sondern von $f(\omega)$ rational abhängen, wie bei den SCHLÄFLI'schen Modulargleichungen, so ist das im vorigen Paragraphen entwickelte Princip nicht unmittelbar anwendbar. Wenn es in diesem Falle auch gelungen ist, die Functionen $\Phi_{a,c}$ so zu bestimmen, dass sie für $q = 0$ endlich bleiben, so folgt daraus noch nicht, dass die Coëfficienten der Transformationsgleichung für $\Phi_{a,c}$ constant sind, da dieselben eine Potenz von $f(\omega)$ im Nenner enthalten können. Man kann aber durch einen kleinen Zusatz auch in diesem Fall unser Princip anwendbar machen. Es geht nämlich (nach § 1, 15) durch die Transformation zweiter Ordnung

$$(1) \qquad \left(\omega\,,\ \frac{\omega - 1}{\omega + 1}\right)$$

$f(\omega)$ in $\sqrt{2}:f(\omega)$ über. Wenn man daher die Functionen $\Phi_{a,c}$ so bestimmt, dass sie durch die Vertauschung (1) nur unter einander ver-

tauscht werden, so haben die Coëfficienten der Transformationsgleichung, deren Wurzeln diese sind, die Eigenschaft, durch die Vertauschung

$$(2) \qquad \left(f(\omega)\,,\ \frac{\sqrt{2}}{f(\omega)}\right)$$

sich nicht zu ändern, und sind also *ganze rationale* Functionen von

$$f(\omega) + \frac{\sqrt{2}}{f(\omega)}.$$

Bleiben diese nun für $q = 0$, also für $f(\omega) = \infty$ endlich, so müssen sie constant sein und alles ist wie in dem vorigen Fall.

Um Functionen $\Phi_{a,c}$ wie die hier geforderten zu bilden, suchen wir zunächst für ein gegebenes Zahlensystem a, c, d die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a', c', d'$ so zu bestimmen, dass

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix},$$

$$(4) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Dieser Ansatz führt zu den Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} a &= c'(\alpha + \beta) + a'(\alpha - \beta), & a &= d'(\alpha + \beta), \\ c - d &= c'(\gamma + \delta) + a'(\gamma - \delta), & c + d &= d'(\gamma + \delta). \end{aligned}$$

Hierdurch ist zunächst d' bestimmt als der grösste gemeinschaftliche Teiler von a und $c + d$, und aus $n = a'd'$ ergiebt sich a'.

Man erhält dann aus (5)

$$(6) \qquad \begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{a}{d'}, & \alpha - \beta &= \frac{a(d' - c')}{n}, \\ \gamma + \delta &= \frac{c + d}{d'}, & \gamma - \delta &= \frac{c(d' - c') - d(d' + c')}{n}, \end{aligned}$$

woraus für c' die beiden Congruenzen folgen:

$$(7) \qquad c'\frac{d + c}{d'} \equiv c - d, \qquad c'\frac{a}{d'} \equiv a \pmod{a'},$$

welche mit einander verträglich sind und c' nach dem modul a' vollständig bestimmen. Ausserdem soll, wie immer, c' durch 16, und wenn n nicht durch 3 teilbar ist, durch 48 teilbar sein.

Aus den Formeln (6) ergiebt sich, dass entweder α, δ gerade, β, γ ungerade oder α, δ ungerade, β, γ gerade sind, und im ersten Fall $\beta\gamma \equiv n \pmod 8$, im zweiten $\gamma\delta \equiv n \pmod 8$, ferner in beiden Fällen $\alpha\beta - \gamma\delta \equiv 0 \pmod{16}$, und wenn n nicht durch 3 teilbar ist,

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta^2\gamma \equiv 0 \pmod 2.$$

Hiernach ergeben sich nach § 1 (16) folgende zusammengehörige Vertauschungen

$$(8) \qquad \begin{array}{ccc} \omega, & f(\omega), & f\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right), \\[2ex] \dfrac{\omega-1}{\omega+1}, & \dfrac{\sqrt{2}}{f(\omega)}, & \rho\left(\dfrac{2}{n}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{f\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right)}, \end{array}$$

worin, wie oben, ρ eine dritte Einheitswurzel bedeutet, welche, falls n nicht durch 3 teilbar ist, den Wert 1 hat.

Definieren wir hiernach die beiden Functionen

$$(9) \qquad \begin{aligned} A &= \left(\frac{f\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right)}{f(\omega)}\right)^r + \left(\frac{f(\omega)}{f\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right)}\right)^r, \\ B &= \left[f(\omega)f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)\right]^s + \left(\frac{2}{n}\right)^{r+s} \frac{2^s}{\left[f(\omega)f\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right)\right]^s}, \end{aligned}$$

worin r, s ganze Zahlen sind, so ergiebt sich, wenn r_1 als Divisor von 24 so bestimmt wird, dass

$$(n-1)rr_1 \equiv 0, \qquad (n+1)sr_1 \equiv 0 \pmod{12},$$

nach § 2 (16), das folgende System von Vertauschungen, (wobei auf die Änderungen der Zahlen a, c, d nicht Rücksicht genommen ist)

$$(10) \qquad \begin{array}{ccc} \omega, & A, & B, \\[1ex] -\dfrac{1}{\omega}, & A, & B, \\[1ex] \omega + 2r_1, & (-1)^{\frac{(n-1)rr_1}{12}} A, & (-1)^{\frac{(n+1)sr_1}{12}} B, \\[1ex] \dfrac{\omega-1}{\omega+1}, & \left(\dfrac{2}{n}\right)^r A, & \left(\dfrac{2}{n}\right) B, \end{array}$$

und diese Functionen sind also zur Anwendung des im vorigen Paragraphen dargelegten Princips geeignet.

Ist n eine Primzahl so genügt nach den Bemerkungen des vorigen Paragraphen die Betrachtung des Falles $a = 1$, für welchen man die Entwicklungen hat

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
A &= q^{-\frac{(n-1)r}{24}} \prod^{\nu} \left(\frac{1 + q^{n(2\nu-1)}}{1 + q^{2\nu-1}}\right)^{r} + q^{\frac{(n-1)r}{24}} \prod^{\nu} \left(\frac{1 + q^{2\nu-1}}{1 + q^{n(2\nu-1)}}\right)^{r}, \\
B &= q^{-\frac{(n+1)s}{24}} \prod (1 + q^{2\nu-1})^{s} (1 + q^{n(2\nu-1)})^{s} + \left(\frac{2}{n}\right)^{r+s} \frac{2^{s} q^{\frac{(n+1)s}{24}}}{\prod (1 + q^{2\nu-1})^{s} (1 + q^{n(2\nu-1)})^{s}}.
\end{aligned}
$$

Die Wahl der Zahlen r, s ist an sich willkürlich. Für kleinere Zahlen r, s wird man im Allgemeinen einfachere Resultate zu erwarten haben. Indessen ist die zweckmässigste Wahl nicht $s = 1$, $r = 1$, sondern die, bei welcher

$$
\frac{(n-1)r}{24}, \qquad \frac{(n+1)s}{24},
$$

welches die Exponenten der höchsten Potenz von q^{-1} in den Entwicklungen (11) sind, Brüche mit demselben Nenner, und zugleich r, s möglichst klein werden. Eine andere Wahl würde gewisse Potenzerhebungen nötig machen. Ausserdem müssen, für ein durch 3 teilbares n, auch r, s durch 3 teilbar sein.

Um die Anwendung des Princips im einfachsten Fall etwas ausführlicher darzulegen, sei $n = 3$, also $r = 6$, $s = 3$, und

$$
A = q^{-\frac{1}{2}} - 5q^{\frac{1}{2}} + \cdots, \qquad B = q^{-\frac{1}{2}} - 5q^{\frac{1}{2}} - \cdots,
$$

woraus, da $A - B$ keine negativen Potenzen von q enthält:

$$
A - B = 0
$$

als Modulargleichung folgt.

Auf diese Weise findet man folgende Formeln, worin

$$
v = f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \qquad u = f(\omega)
$$

gesetzt ist.

I. $n = 3.$ $$A = \left(\frac{u}{v}\right)^6 + \left(\frac{v}{u}\right)^6, \qquad B = u^3v^3 - \frac{8}{u^3v^3};$$
$$A - B = 0.$$

$n = 5.$ $$A = \left(\frac{u}{v}\right)^3 + \left(\frac{v}{u}\right)^3, \qquad B = u^2v^2 - \frac{4}{u^2v^2};$$
$$A - B = 0.$$

$n = 7.$ $$A = \left(\frac{u}{v}\right)^4 + \left(\frac{v}{u}\right)^4, \qquad B = u^3v^3 + \frac{8}{u^3v^3};$$
$$A - B + 7 = 0.$$

$n = 11.$ $$A = \left(\frac{u}{v}\right)^6 + \left(\frac{v}{u}\right)^6, \qquad B = uv - \frac{2}{uv};$$
$$A - B^5 + B^3 + 2B = 0.$$

$n = 13.$ $$A = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}, \qquad B = u^6v^6 - \frac{64}{u^6v^6};$$
$$A^7 + 6A^5 + A^3 - 20A - B = 0.$$

$n = 17.$ $$A = \left(\frac{u}{v}\right)^3 + \left(\frac{v}{u}\right)^3, \qquad B = u^4v^4 + \frac{16}{u^4v^4};$$
$$A^3 - B^2 + 17AB - 34A^2 + 34B + 116A + 440 = 0.$$

$n = 19.$ $$A = \left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{u}\right)^2, \qquad B = u^3v^3 - \frac{8}{u^3v^3};$$
$$A^5 - B^3 + 19AB^2 - 95A^2B + 109A^3 + 128B - 128A = 0.$$ [1]

[1] Die bei Berechnung dieser Formeln benutzten Reihenentwicklungen, die man behufs Verification derselben nur einzusetzen hat, sind, soweit sie gebraucht werden, folgende:

$n = 3.$ $\quad A = B = q^{-\frac{1}{2}}(1 - 5q \ldots)$

$n = 5.$ $\quad A = B = q^{-\frac{1}{2}}(1 - 2q \ldots)$

$n = 7.$ $\quad A = q^{-1}(1 - 4q \ldots)$
$\quad B = q^{-1}(1 + 11q \ldots)$

$n = 11.$ $\quad A = q^{-\frac{5}{2}}(1 - 6q + 21q^2 \ldots)$
$\quad B = q^{-\frac{1}{2}}(1 - q + 2q^2 \ldots)$

$n = 13.$ $\quad A = q^{-\frac{1}{2}}(1 + 2q^2 - 2q^3 \ldots)$
$\quad B = q^{-\frac{7}{2}}(1 + 6q + 15q^2 + 26q^3 \ldots)$

Aus diesem ersten System leitet man ein zweites und drittes her für die Functionen f_1, f_2, indem man ω durch $\omega + 1$ und darauf ω durch $-1 : \omega$ ersetzt (§ 2, 13). Diese beiden Systeme haben dieselbe Form, nur dass einmal

$$u_1 = f_1(\omega), \qquad v_1 = \left(\frac{2}{d}\right) f_1\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

das andere mal

$$u_1 = f_2(\omega), \qquad v_1 = \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

zu setzen ist.

II. $n = 3$.
$$A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^6 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^6, \qquad B_1 = u_1^3 v_1^3 + \frac{8}{u_1^3 v_1^3};$$
$$A_1 + B_1 = 0.$$

$n = 5$.
$$A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^3 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^3, \qquad B_1 = u_1^2 v_1^2 + \frac{4}{u_1^2 v_1^2};$$
$$A_1 + B_1 = 0.$$

$n = 7$.
$$A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^4 + \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^4, \qquad B_1 = u_1^3 v_1^3 + \frac{8}{u_1^3 v_1^3};$$
$$A_1 - B_1 - 7 = 0.$$

$n = 11$.
$$A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^6 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^6, \qquad B_1 = u_1 v_1 + \frac{2}{u_1 v_1};$$
$$A_1 + B_1^5 + B_1^3 - 2B_1 = 0.$$

$n = 13$.
$$A_1 = \frac{u_1}{v_1} - \frac{v_1}{u_1}, \qquad B_1 = u_1^6 v_1^6 + \frac{64}{u_1^6 v_1^6};$$
$$A_1^7 - 6A_1^5 + A_1^3 + 20A_1 + B_1 = 0.$$

$n = 17$.
$$A = q^{-2}(1 - 3q + 6q^2 - 13q^3 + 25q^4 - 39q^5 + 76q^6 \ldots)$$
$$B = q^{-3}(1 + 4q + 6q^2 + 8q^3 + 17q^4 + 28q^5 + 54q^6 \ldots)$$

$n = 19$.
$$A = q^{-\frac{3}{2}}(1 - 2q + 3q^2 - 5q^3 + 11q^4 - 13q^5 + 24q^6 - 28q^7 \ldots)$$
$$B = q^{-\frac{5}{2}}(1 + 3q + 3q^2 + 4q^3 + 9q^4 + 4q^5 + 39q^6 - 27q^7 \ldots).$$

$$n = 17. \qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^3 + \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^3, \qquad B_1 = u_1^4 v_1^4 + \frac{16}{u_1^4 v_1^4};$$

$$A_1^3 - B_1^2 - 17A_1B_1 - 34A_1^2 - 34B_1 + 116A_1 + 440 = 0.$$

$$n = 19. \qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^2 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^2, \qquad B_1 = u_1^3 v_1^3 + \frac{8}{u_1^3 v_1^3};$$

$$A_1^5 + B_1^3 - 19A_1B_1^2 + 95A_1^2B_1 - 109A_1^3 + 128B_1 - 128A_1 = 0.$$

§ 5. *Die irrationalen Modulargleichungen.*

Noch einfacher gestaltet sich die Anwendung unseres Princips (§ 2) bei den folgenden Annahmen.

Wir setzen wie oben

$$(1) \qquad \begin{aligned} u &= f(\omega), & u_1 &= f_1(\omega), & u_2 &= f_2(\omega), \\ v &= f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), & v_1 &= \left(\frac{2}{a}\right) f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), & v_2 &= \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \end{aligned}$$

so dass sich aus § 2 (16) die Vertauschungen ergeben

$$(2) \qquad \begin{array}{cccc} \omega, & uv, & u_1v_1, & u_2v_2, \\ -\frac{1}{\omega}, & uv, & u_2v_2, & u_1v_1, \\ \omega + 1, & e^{\frac{(n+1)\pi i}{24}} u_1v_1, & e^{\frac{(n+1)\pi i}{24}} uv, & e^{\frac{(n+1)\pi i}{12}} u_2v_2. \end{array}$$

Nimmt man also

$$(3) \qquad n + 1 \equiv 0 \pmod 8$$

an und setzt:

$$(4) \qquad \begin{aligned} 2A &= uv + (-1)^{\frac{n+1}{8}}(u_1v_1 + u_2v_2), \\ B &= uvu_1v_1 + uvu_2v_2 + (-1)^{\frac{n+1}{8}} u_1v_1u_2v_2 \\ &= \frac{2}{u_2v_2} + \frac{2}{u_1v_1} + (-1)^{\frac{n+1}{8}} \frac{2}{uv}, \end{aligned}$$

so gehen aus (2) die Vertauschungen hervor

$$
(5)\qquad
\begin{array}{ccc}
\omega, & A, & B, \\
-\frac{1}{\omega}, & A, & B, \\
\omega + 1, & e^{\frac{\pi i(n+1)}{12}} A, & e^{-\frac{\pi i(n+1)}{12}} B.
\end{array}
$$

Unter der Voraussetzung dass n eine Primzahl ist, hat man also nach § 3 aus A, B ganze rationale Functionen zusammenzusetzen, welche unter der Annahme $a = 1$, $d = n$, $c = 0$ für $q = 0$ nicht unendlich werden, welche nur solche Glieder $A^h B^k$ enthalten, in welchen $(n+1)(h-k)$ bei der Division mit 24 einen und denselben Rest lassen, und diese Functionen Constanten gleich zu setzen, deren Wert sich aus $q = 0$ ergiebt. Auf diese Weise erhält man durch sehr einfache Rechnung [1]

$$
(6)\qquad
\begin{array}{ll}
n = 7, & A = 0, \\
n = 23, & A = 1, \\
n = 31, & (A^2 - B)^2 - A = 0, \\
n = 47, & A^2 - A - B = 2, \\
n = 71, & A^3 - 4A^2 + 2A - B = 1.
\end{array}
$$

Ist n eine zusammengesetzte Zahl, so bestehen gleichfalls solche Gleichungen zwischen A und B, zu deren Ableitung aber nicht die Betrachtung des einen Transformationsfalles ($a = 1$) ausreicht; und die demgemäss auch weniger einfach ausfallen. Wir führen nur die Formel an:

$$
(7)\qquad n = 15, \qquad A^3 - AB + 1 = 0.
$$

[1] Man benutzt dazu die für $n > 7$ richtigen Entwicklungen

$$
uv = q^{\frac{n+1}{24}}(1 + q + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + 2q^8 \ldots)
$$

$$
u_1 v_1 = q^{-\frac{n+1}{24}}(1 - q - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + 2q^8 \ldots)
$$

$$
u_2 v_2 = 2q^{\frac{n+1}{12}}(1 + q^2 + q^4 + 2q^6 + 2q^8 + \ldots).
$$

Für grössere zusammengesetzte Zahlen werden sich weiterhin einfachere Formeln ergeben.

Ist $n \equiv 3 \pmod 8$ so sind den Modulargleichungen die Functionen

$$(8)\qquad \begin{aligned} 4A &= u^2v^2 - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2, \\ B &= u^2v^2u_1^2v_1^2 + u^2v^2u_2^2v_2^2 - u_1^2v_1^2u_2^2v_2^2 \end{aligned}$$

zu Grunde zu legen, für welche sich die Vertauschungen ergeben

$$(9)\qquad \begin{array}{lll} \omega, & A, & B, \\ -\frac{1}{\omega}, & A, & B, \\ \omega + 1, & e^{\frac{(n+1)\pi i}{6}}A, & e^{-\frac{(n+1)\pi i}{6}}B, \end{array}$$

und man findet wie oben

$$(10)\qquad \begin{array}{ll} n = 3, & A = 0, \\ n = 11, & A = 1, \\ n = 19, & A^3 - 7A^2 - B = 0. \end{array}$$

Ist $n \equiv 1 \pmod 4$ so muss man, um zu analogen Resultaten zu kommen

$$\begin{aligned} 8A &= u^4v^4 - u_1^4v_1^4 - u_2^4v_2^4, \\ B &= u^4v^4u_1^4v_1^4 + u^4v^4u_2^4v_2^4 - u_1^4v_1^4u_2^4v_2^4 \end{aligned}$$

setzen, was aber nur für den ersten Fall $n = 5$ zu einer einfachen Formel führt

$$(11)\qquad n = 5, \qquad A = 1.$$ [1]

[1] Die in diesem Paragraphen enthaltenen Formeln finden sich teils in der in der Einleitung erwähnten Dissertation von E. FIEDLER, andere, wie die für $n = 47, 71$ lassen sich aus den dortigen, minder einfachen herleiten.

§ 6. *Zusammengesetzte Transformationsgrade.*

Ist n eine zusammengesetzte (ungerade) Zahl und

$$n = n'n'' \tag{1}$$

eine Zerlegung derselben in zwei Factoren n', n'' die zu einander relativ prim sind, so gehört zu jeder Transformation n^{ten} Grades

$$\begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix} \tag{2}$$

je eine und nur eine Transformation der Grade n', n''

$$\begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c'', & d'' \end{pmatrix}, \tag{3}$$

welche durch folgende Bedingungen bestimmt sind

$$\left|\begin{array}{l} ad = n, \qquad a'd' = n', \qquad a''d'' = n'', \\ \qquad a'a'' = a, \qquad d'd'' = d, \\ d''c' \equiv c \pmod{a'}, \qquad d'c'' \equiv c \pmod{a''}. \end{array}\right. \tag{4}$$

Nach (4) sind d', d'' bestimmt als die grössten gemeinschaftlichen Teiler von d, n' und von d, n''. Bildet man die zusammengesetzten Transformationen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1, & 0 \\ c_1, & d_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_1, & 0 \\ c'_1, & d'_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c'', & d'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha'', & \beta'' \\ \gamma'', & \delta'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a''_1, & 0 \\ c''_1, & d''_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \lambda, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & 0 \\ c_2, & d \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \lambda', & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a', & 0 \\ c'_2, & d' \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c'', & d'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \lambda'', & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c''_2, & d'' \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

so ergiebt sich aus den Formeln (6) bis (11) § 2 leicht, dass auch die Transformationen

$$(7)\qquad \begin{pmatrix} a_1, & 0 \\ c_1, & d_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1', & 0 \\ c_1', & d_1' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1'', & 0 \\ c_1'', & d_1'' \end{pmatrix}$$

und

$$(8)\qquad \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c_2, & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a', & 0 \\ c_2', & d' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c_2'', & d'' \end{pmatrix}$$

sich nach den Formeln (4) entsprechen,[1] und daraus schliesst man wie in § 2 dass die Invarianten

$$j\left(\frac{c' + d'\omega}{a'}\right), \quad j\left(\frac{c'' + d''\omega}{a''}\right)$$

---

[1] Für die Zusammensetzungen (5) ergiebt sich nämlich nach § 2 dass

d_1 der grösste gemeinsame Teiler von a und c,
d » » » » a_1 » c_1,
d_1' » » » » a' » c',
d' » » » » a_1' » c_1',

ferner

$$cc_1 \equiv -dd_1 \pmod{n}, \qquad c'c_1' \equiv -d'd_1' \pmod{n'},$$

$$c\,\frac{c_1}{d} \equiv -d_1 \pmod{a}$$

und da nach (4)

$$c \equiv d''c' \pmod{a'} \quad \text{und} \quad a = a'a'', \qquad d = d'd'' \quad \text{ist}$$

$$c'\,\frac{c_1}{d'} \equiv -d_1 \pmod{a'} \quad \text{oder} \quad c'c_1 \equiv -d'd_1 \pmod{n'},$$

also

$$c'(c_1 - d_1''c_1') \equiv 0 \pmod{n'}$$

und

$$a'(c_1 - d_1''c_1') \equiv 0 \pmod{n'},$$

weil c_1 und c_1' durch d' teilbar sind. Da nun d_1' der grösste gemeinschaftliche Teiler von a', c' und $n' = d_1'a_1'$ ist, so folgt hieraus, in Übereinstimmung mit (4)

$$c_1 \equiv d_1''c_1' \pmod{a_1'}.$$

Für die Zusammensetzung (6) ergiebt sich das Gleiche noch einfacher aus den Congruenzen (§ 2, 7)

$$c_2 \equiv c + d \pmod{a}, \qquad c_2' \equiv c' + d' \pmod{a'}, \qquad d''c_2' \equiv c_2 \pmod{a'}.$$

rational ausdrückbar sind durch

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \; j(\omega).$$

Für die Anwendung auf die Functionen f, f_1, f_2 ist noch eine Bemerkung beizufügen, welche sich auf den Fall bezieht, dass n durch 3 teilbar ist. In diesem Fall ist von den beiden Zahlen n', n'' eine, nehmen wir an n'', durch 3 teilbar. Es kann also dann c' durch 48 teilbar vorausgesetzt werden und die Zusammengehörigkeit zweier Zahlen c, c'' soll noch näher dadurch bestimmt werden, dass an Stelle der letzten Congruenz (4) die folgende tritt:

$$d'c'' \equiv c \pmod{3a''}. \tag{9}$$

Ist diese Congruenz, wie in (4) angenommen ist, für den Modul a'' befriedigt, so kann man dieselbe für den Modul $3a''$ befriedigen, indem man zu c'' ein Vielfaches von a'' hinzufügt.

Unter dieser Voraussetzung ergeben sich für die in den Transformationen (5), (6) vorkommenden Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ nach § 2 (9), (7) noch folgende Congruenzen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv \alpha'' d' d_1', & \beta &\equiv \beta'' a' d_1' \\ \gamma &\equiv \gamma'' a' d_1', & \delta &\equiv \delta'' d' d_1' \end{aligned}\right\} \pmod 3, \tag{10}$$
$$\lambda \equiv n'\lambda'' \pmod 3.$$

Wenden wir nun die Bezeichnung u, v in demselben Sinne an wie in (15) § 2 und geben den Buchstaben v', v'' die entsprechende Bedeutung für die Zahlen n', n'', welche v für die Zahl n hat, (wobei jedoch stets die Zusammengehörigkeit nach den Congruenzen (4), (9) aufrecht erhalten bleibt) so erhält man die folgenden einander entsprechenden Vertauschungen:

$$\begin{array}{llll} \omega & ; \; u, \; u_1, \; u_2 & ; \; v, & v_1, \quad v_2, \\ -\frac{1}{\omega} & ; \; u, \; u_2, \; u_1 & ; \; \rho v, & \rho v_2, \quad \rho v_1. \\ \omega + 1 & ; \; e^{\frac{\pi i}{24}} u_1, \; e^{-\frac{\pi i}{24}} u, \; e^{\frac{\pi i}{12}} u_2 & ; \; \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v_1, & \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v, \quad \sigma e^{\frac{n\pi i}{12}} v_2, \end{array} \tag{11}$$

$$\begin{array}{llll} \omega & ; \; v', \; v_1', \; v_2' & ; \; v'', & v_1'', \quad v_2'', \\ -\frac{1}{\omega} & ; \; v', \; v_2', \; v_1' & ; \; \rho^{n'} v'', & \rho^{n'} v_2'', \quad \rho^{n'} v_1''. \\ \omega + 1 & ; \; e^{\frac{n'\pi i}{24}} v_1', \; e^{-\frac{n'\pi i}{24}} v', \; e^{\frac{n'\pi i}{12}} v_2' & ; \; \sigma' e^{-\frac{n''\pi i}{24}} v_1'', & \sigma' e^{-\frac{n''\pi i}{24}} v'', \quad \sigma' e^{\frac{n''\pi i}{12}} v_2'', \end{array}$$

worin ρ, σ dritte Einheitswurzeln sind, welche, falls n nicht durch 3 teilbar ist, den Wert 1 haben.

Auf Grund dieser Betrachtungen können wir auf zweierlei Arten zur Bildung von Modulargleichungen für zusammengesetzte Transformationsgrade gelangen.

1.) Ist

$$(n' + 1)(n'' + 1) = 8\mu \equiv 0 \pmod 8, \tag{12}$$

so setzen wir

$$U = uvv'v'', \qquad U_1 = u_1 v_1 v_1' v_1'', \qquad U_2 = u_2 v_2 v_2' v_2'', \tag{13}$$

$$\begin{aligned} 2A &= U + (-1)^n (U_1 + U_2), \\ B &= UU_1 + UU_2 + (-1)^n U_1 U_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Für die letzteren Functionen ergeben sich dann aus (11) die einander entsprechenden Vertauschungen:

$$\begin{array}{ccc} \omega, & A, & B, \\ -\frac{1}{\omega}, & \rho^{n'+1} A, & \rho^{-(n'+1)} B, \\ \omega + 1, & \sigma^{n'+1} e^{\frac{2\mu\pi i}{3}} A, & \sigma^{-(n'+1)} e^{-\frac{2\mu\pi i}{3}} B. \end{array} \tag{15}$$

Sind die in (15) vorkommenden dritten Einheitswurzeln $= 1$, was eintritt, wenn n durch 3 nicht teilbar und wenigstens einer seiner Factoren den Rest 2 hat, oder wenn n'' durch 3 teilbar, n' den Rest 2 hat, so ist jede rationale Function von A, B Wurzel einer Invariantengleichung. In den anderen Fällen kommt dieselbe Eigenschaft dem Cubus einer solchen rationalen Function von A, B zu, bei welcher die Differenzen der Exponenten von A und B in allen Gliedern bei der Teilung mit 3 denselben Rest lassen.

Nach § 3 haben wir also solche ganze rationale Functionen von A, B zu bilden, deren sämmtliche Werte für $q = 0$ endlich bleiben, und diese Constanten gleich zu setzen. Sind aber n', n'' zwei Primzahlen, so genügt es auch hier, wenn der erste von diesen Werten, derjenige, für welchen

$$U = f(\omega) f(n'\omega) f(n''\omega) f(n'n''\omega)$$

ist, keine negativen Potenzen von q enthält, weil man aus diesem die übrigen ableiten kann, indem man ω ersetzt durch

$$(16) \qquad \frac{\omega}{n}, \quad \frac{\omega}{n'}, \quad \frac{\omega}{n''}$$

und dann ω noch um ganze Zahlen vermehrt.

Durch sehr einfache Rechnung ergeben sich die folgenden Beispiele:

$$(17) \qquad \begin{aligned} n &= 15, & A &= 1, \\ n &= 21, & (A^2 - B)^2 - A &= 0, \\ n &= 33, & A^2 - B - A &= 4, \\ n &= 35, & A^2 - B - A &= 2, \\ n &= 55, & A^3 - B - 4A^2 - A + 4 &= 0. \end{aligned}$$

2.) Ist

$$(18) \qquad (n' - 1)(n'' - 1) = 8\mu \equiv 0 \pmod 8,$$

so setzen wir

$$(19) \qquad \begin{aligned} A &= \frac{\eta v}{v' v''} + (-1)^\mu \left(\frac{\eta_1 v_1}{v_1' v_1''} + \frac{\eta_2 v_2}{v_2' v_2''} \right), \\ B &= \frac{v' v''}{\eta v} + (-1)^\mu \left(\frac{v_1' v_1''}{\eta_1 v_1} + \frac{v_2' v_2''}{\eta_2 v_2} \right), \end{aligned}$$

wofür sich wieder die Vertauschungen ergeben

$$(20) \qquad \begin{array}{ccc} \omega, & A, & B, \\ -\dfrac{1}{\omega}, & \rho^{1-n'} A, & \rho^{n'-1} B, \\ \omega + 1, & \sigma^{1-n'} e^{\frac{2\mu\pi i}{3}} A, & \sigma^{n'-1} e^{\frac{2\mu\pi i}{3}} B. \end{array}$$

Auf diese Functionen lässt sich dasselbe Verfahren anwenden wie auf die in 1.) betrachteten, wenn man noch die Beschränkung hinzufügt, dass man nur symmetrische Functionen von A, B, d. h. rationale Functionen von AB, $A + B$ benutzt, weil nur dann aus dem einen Wert einer solchen

Function die sämmtlichen übrigen durch die Vertauschungen (16) hervorgehen. Hier ergeben sich die folgenden Beispiele

$$
\begin{aligned}
&n = 15, && AB + 1 = 0,\\
(21)\qquad &n = 35, && 2(A+B) - AB = 5,\\
&n = 39, && 2(A+B) - AB = 3.
\end{aligned}
$$

Auch wenn n mehr als zwei Primfactoren enthält, behalten diese Schlüsse mit den nötigen Modificationen ihre Gültigkeit. Ich führe das Beispiel $n = 105$ an, für welches man zu setzen hat:

$$
\begin{aligned}
A = {} & \frac{f(3\omega)f(5\omega)f(7\omega)f(105\omega)}{f(\omega)f(15\omega)f(21\omega)f(35\omega)} + \frac{f_1(3\omega)f_1(5\omega)f_1(7\omega)f_1(105\omega)}{f_1(\omega)f_1(15\omega)f_1(21\omega)f_1(35\omega)}\\
& + \frac{f_2(3\omega)f_2(5\omega)f_2(7\omega)f_2(105\omega)}{f_2(\omega)f_2(15\omega)f_2(21\omega)f_2(35\omega)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B = {} & \frac{f(\omega)f(15\omega)f(21\omega)f(35\omega)}{f(3\omega)f(5\omega)f(7\omega)f(105\omega)} + \frac{f_1(\omega)f_1(15\omega)f_1(21\omega)f_1(35\omega)}{f_1(3\omega)f_1(5\omega)f_1(7\omega)f_1(105\omega)}\\
& + \frac{f_2(\omega)f_2(15\omega)f_2(21\omega)f_2(35\omega)}{f_2(3\omega)f_2(5\omega)f_2(7\omega)f_2(105\omega)},
\end{aligned}
$$

$$n = 105:$$

$$A^2B^2 - 4(A+B)^3 + 10AB(A+B) + 4(A+B)^2 + 10AB + 14(A+B) + 5 = 0.$$

II. ABSCHNITT.

Anwendungen auf die complexe Multiplication.

§ 7. *Die singulären Werte von $f(\omega)$.*

Wir setzen nun in die Function $f(\omega)$ für ω einen der complexen Multiplication entsprechenden singulären Wert, d. h. die Wurzel einer quadratischen ganzzahligen Gleichung mit negativer Determinante

$$(1)\qquad A\omega^2 + 2B\omega + C = 0.$$

wenn (A, B, C) eine eigentlich primitive quadratische Form der Determinante $-m$, also $A, 2B, C$ ohne gemeinsamen Teiler und

$$AC - B^2 = m. \tag{2}$$

Nach der Abhandlung I, § 18, ist alsdann

$$j(\omega) = \frac{(f(\omega)^{24} - 16)^3}{f(\omega)^{24}} \tag{3}$$

eine ganze algebraische Zahl, welche ungeändert bleibt, wenn die Gleichung (1) durch eine äquivalente ersetzt wird, nämlich die Wurzel einer ganzzahligen Gleichung

$$H(u) = 0, \tag{4}$$

deren Grad gleich ist der Anzahl h der Classen eigentlich primitiver quadratischer Formen der Determinante $-m$.

Es soll nun nachgewiesen werden, dass bei passender Auswahl des Repräsentanten der Classe (1) *dieselbe Eigenschaft den Grössen* $f(\omega)^{24}$, *und wenn* m *durch* 3 *nicht teilbar ist auch* $f(\omega)^8$ *zukommt.*

Die sämmtlichen einander äquivalenten Gleichungen (1), die einer Formenclasse entsprechen, zerfallen nach folgenden Kennzeichen in drei Unterabteilungen

$$(5) \quad m \equiv 1 \pmod 2. \qquad \begin{array}{llll} \text{I.} & A \equiv 1, & B \equiv 0, & C \equiv 1, \\ \text{II.} & A \equiv 1, & B \equiv 1, & C \equiv 0, \pmod 2 \\ \text{III.} & A \equiv 0, & B \equiv 1, & C \equiv 1; \end{array}$$

$$(6) \quad m \equiv 0 \pmod 2. \qquad \begin{array}{llll} \text{I.} & A \equiv 1, & B \equiv 1, & C \equiv 1, \\ \text{II.} & A \equiv 1, & B \equiv 0, & C \equiv 0, \pmod 2 \\ \text{III.} & A \equiv 0, & B \equiv 0, & C \equiv 1. \end{array}$$

Nehmen wir an, (1) gehöre zur ersten dieser Unterabteilungen, so bleibt diese Eigenschaft erhalten, wenn ω ersetzt wird durch

$$\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}.$$

falls

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} \pmod 2$$

während falls

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \pmod 2$$

(1) aus der Abteilung I in den beiden ersten Fällen nach II, in den beiden letzten nach III gelangt.

Die Function $f(\omega)^{24}$ bleibt aber gleichfalls ungeändert durch die Substitutionen (7), während sie durch die Substitutionen (8) resp. in $-f_1(\omega)^{24}$, $-f_2(\omega)^{24}$ übergeht.

Es ist nun früher bewiesen (§ 2 und Abh. I, § 16), dass die ν Grössen

$$(9) \qquad f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)^r,$$

wenn r ein Teiler von 24, der, falls $n = ad$ durch 3 teilbar ist, selbst durch 3 teilbar sein muss, (bei variablem ω) die Wurzeln einer Transformationsgleichung ν^{ten} Grades sind

$$(10) \qquad \Phi_n\left[f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)^r, f(\omega)^r\right] = 0,$$

und hierin wollen wir $r = 8$, und wenn n durch 3 teilbar ist $= 24$ annehmen.

Damit

$$x = f(\omega)^r$$

die Gleichung

$$(11) \qquad \Phi_n(x, x) = 0$$

befriedige, ist notwendig und hinreichend, dass wenigstens für eine der ν Grössen (9) die Bedingung erfüllt sei

$$(12) \qquad f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)^r = f(\omega)^r.$$

und dafür ist erforderlich und hinreichend (Abh. I, § 6), dass die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sich so bestimmen lassen, dass

$$(13) \qquad \frac{c + d\omega}{a} = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

dass (nach § 1, 16)

$$(14) \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \equiv \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} \pmod 2,$$

dass ferner, wenn $r = 8$ ist,

$$(15) \qquad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta^2\gamma \equiv 0 \pmod 3.$$

Genügt nun ω der quadratischen Gleichung (1) so ergiebt sich durch Vergleichung mit (13), wenn x einen unbestimmten ganzzahligen Factor bedeutet:

$$\beta d = Ax,$$

$$\alpha c - \gamma a = Cx,$$

$$\alpha d + \beta c - \delta a = 2Bx.$$

Setzt man also noch

$$-\alpha d + \beta c - \delta a = 2y,$$

so folgt:

$$\beta d = Ax, \qquad \beta c - \delta a = Bx + y,$$

$$\alpha c - \gamma a = Cx, \qquad \alpha d = Bx - y,$$

$$(16) \qquad n = mx^2 + y^2.$$

Nimmt man n, A ohne gemeinsamen Teiler an, so muss $d = 1$ sein, und man erhält

$$(17) \qquad \begin{aligned} \alpha &= Bx - y, & \beta &= Ax, \\ n\gamma &= -Cx + c(Bx - y), & n\delta &= cAx - Bx - y \end{aligned}$$

woraus man ersieht, dass x, y ohne gemeinsamen Teiler sind; übrigens können bei gegebenem m die Zahlen n, x, y der Bedingung (16) gemäss beliebig sein.

Wir machen nun, je nach dem Verhalten von m gegen den Modul 6 die folgenden Annahmen, worin sich die Werte von x, y als notwendig ergeben:

$$\begin{array}{llll}
m \equiv 0, & n = m + 9 \equiv 3 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 3, \\
m \equiv 3, & n = m \equiv 3 \pmod 6, & x = 1, & y = 0. \\
m \equiv 1, & n = m + 16 \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 4. \\
m \equiv 2, & n = m + 9 \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 3, \\
m \equiv 4, & n = m + 1 \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 1. \\
m \equiv 5, & n = m \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = 0.
\end{array}$$

Hieraus erkennt man, dass *nur unter der Voraussetzung* (5), (6) I die Zahlen (17) der Bedingung (14) (und zwar der zweiten) genügen.

Da also hiernach von den drei Wurzeln der Gleichung (3)

$$j(\omega) = \frac{(x-16)^3}{x}$$

eine und nur eine der Gleichung (11) (für $r = 24$) genügt, so folgt, wenn wir des kürzeren Ausdrucks halber den in Abhandlung I, § 18, eingeführten Namen »*Classeninvariante*« von $j(\omega)$ auf jede *rationale Function* von $j(\omega)$ übertragen, durch welche auch $j(\omega)$ rational darstellbar ist:

$f(\omega)^{24}$ ist eine Classeninvariante.

Ist m durch 3 unteilbar, so erhält, nachdem (5), (6) I festgesetzt ist, $f(\omega)^8$ durch die lineare Transformation $(\omega, \omega + 2\lambda)$ noch drei verschiedene Werte, welche wenn A durch 3 nicht teilbar vorausgesetzt wird, dadurch unterschieden werden können, dass

$$B \equiv 0, 1, 2 \pmod 3; \tag{18}$$

von diesen genügt aber *nur der der ersten Annahme entsprechende* Wert der Bedingung (11).

Es genügt also von den drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - f(\omega)^{24} = 0$$

eine und nur eine der Gleichung (11) (für $r = 8$), und daraus folgt:

Ist m nicht durch 3 teilbar, so ist $f(\omega)^8$ eine Classeninvariante.

Beispiele, wie sie weiter unten folgen, lehren dass in vielen Fällen dieselbe Eigenschaft noch niedrigeren Potenzen von $f(\omega)$ zukommt.[1]

Die Hauptform der Determinante $-m$, $(1, 0, m)$ gehört nur bei ungeradem m in die Unterabteilung I und daher wird nur in diesem Fall $f(\sqrt{-m})^{24}$ oder $f(\sqrt{-m})^8$ Classeninvariante sein. Bei geradem m gehört $(1, 1, m+1)$ oder $(1, 3, m+9)$ zu I und in diesem Fall sind also die Classeninvarianten

$$f(1+\sqrt{-m})^{24} = -f_1(\sqrt{-m})^{24},$$

oder

$$f(3+\sqrt{-m})^8 = -f_1(\sqrt{-m})^8.$$

§ 8. *Die Classeninvariante $\gamma_2(\omega)$.*

Aus den soeben bewiesenen Eigenschaften der Zahlen $f(\omega)$ folgt, dass, wenn m nicht durch 3 teilbar ist, auch

$$\gamma_2(\omega) = \frac{f(\omega)^{24} - 16}{f(\omega)^8} \tag{1}$$

eine Classeninvariante ist, wenn an der Voraussetzung des vorigen Paragraphen, dass $B \equiv 0 \pmod 3$ sei, festgehalten wird. Es lässt sich dies auch auf demselben Wege direct beweisen, da auch zwischen den Functionen

$$\gamma_2\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \ \gamma_2(\omega) \tag{2}$$

falls a durch 3 nicht teilbar und c durch 3 teilbar ist, eine Transformationsgleichung besteht.

Dieser directe Weg ist deshalb wichtig, weil er sich auch auf die Classen der zweiten Art anwenden lässt. Genügt nämlich ω einer Gleichung zweiter Art

$$A\omega^2 + B\omega + C = 0, \tag{3}$$

[1] Es lässt sich ähnlich wie oben zeigen, dass, wenn m nicht durch 8 teilbar ist, $f(\omega)^6$ oder $f(\omega)^{12}$ Classeninvariante ist.

worin B ungerade ist, so wird

$$\gamma_2\left(\frac{c + d\omega}{a}\right) = \gamma_2(\omega) \tag{4}$$

dann und nur dann erfüllt sein, wenn

$$\frac{c + d\omega}{a} = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{5}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta^2\gamma \equiv 0 \pmod 3. \tag{6}$$

Setzt man also, wie oben

$$\begin{gathered} \alpha = \frac{1}{2}(Bx - y), \qquad \beta = Ax, \\ n\gamma = -Cx + \frac{1}{2}c(Bx - y), \qquad n\delta = cAx - \frac{1}{2}(Bx + y), \\ 4n = mx^2 + y^2, \end{gathered} \tag{7}$$

nimmt A durch 3 unteilbar an und setzt

wenn $m \equiv +1 \pmod 3$, $n = m + 4 \equiv -1 \pmod 3$, $x = 2$, $y = \pm 4$.

wenn $m \equiv -1 \pmod 3$, $n = m \quad \equiv -1 \pmod 3$, $x = 2$, $y = 0$.

so folgt wieder, dass die Bedingung (6) nur unter der Voraussetzung

$$B \equiv 0 \pmod 3$$

befriedigt ist, woraus man wie oben schliesst, dass $\gamma_2(\omega)$ einer ganzzahligen Gleichung genügt, deren Grad h' gleich ist der Anzahl der Formenclassen zweiter Art der Determinante $-m$, da diese Eigenschaft nach Abh. I, § 18, für $\gamma_2(\omega)^3$ feststeht.

Diese Bemerkung führt uns zur Aufstellung von Classengleichungen in einigen interessanten Fällen.

Die Determinanten

$$-11, \; -19, \; -43, \; -67, \; -163$$

haben die Eigenschaft, dass für jede derselben eine Classe der zweiten und drei Classen der ersten Art existieren, dass also die Classeninvarianten

zweiter Art, $\gamma_2(\omega)$, *rationale ganze* Zahlen sind.[1] Indem wir die beiden ersten -11, -19 einer anderen Betrachtung vorbehalten, suchen wir diese ganzen Zahlen für $m = 43, 67, 163$ zu bestimmen. Wir haben also

$$\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-43}}{2}\right),\ \gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-67}}{2}\right),\ \gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-163}}{2}\right)$$

zu berechnen.

Hermite hat in der oben citierten Arbeit »*Sur la théorie des équations modulaires*» dieselbe Betrachtung auf die von ihm mit α bezeichnete Grösse angewandt, welche nach unserer Bezeichnung mit

$$-2^{-8}\cdot\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right)^3$$

übereinstimmt, und aus seinem Resultat für $m = 43$ folgt:

$$(8)\qquad -\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-44}}{2}\right) = 960 = 64 . 15.$$

Für die beiden grösseren Zahlen $m = 67$, $m = 163$ lässt sich die Rechnung in einfachster Weise aus der Entwicklung § 2 (3) führen, indem man mit vollständig hinreichender Genauigkeit

$$-\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right) = e^{\frac{\pi\sqrt{m}}{3}}$$

setzen und diese Zahl mit siebenstelligen Logarithmen berechnen kann.[2]

Man erhält

$$(9)\qquad -\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-67}}{2}\right) = 5280 = 32 . 3 . 5 . 11.$$

$$(10)\qquad -\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-163}}{2}\right) = 640320 = 2^6 . 5 . 3 . 667.$$

Die Einfachheit dieser Resultate zeigt sich aber erst, wenn man zu den Functionen $f(\omega)$ übergeht, wobei es keinen wesentlichen Unterschied macht, ob man Formen erster oder zweiter Art zu Grunde legt.

[1] Nach der auf Induction gegründeten Vermuthung von Gauss (Disq. Ar. art. 303) sind diese 5 Determinanten die einzigen, welchen diese Eigenschaft zukommt.

[2] Auch für $m = 43$ ergiebt dies Verfahren den Wert 959, 98... also wie oben 960.

Die cubische Gleichung

$$y^3 - \gamma_2(\omega)y - 16 = 0$$

hat nämlich nach § 1 (11) die Wurzeln

$$f(\omega)^8, \; -f_1(\omega)^8, \; -f_2(\omega)^8.$$

Es ist aber nach § 1, (15), (13)

$$-f_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right)^8 = \frac{16}{f(\sqrt{-m})^8},$$

und wenn daher

$$x = f(\sqrt{-m}) \tag{11}$$

gesetzt wird, so ist x^8 Wurzel der cubischen Gleichung

$$x^{24} + \gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right)x^{16} - 2^8 = 0 \tag{12}$$

und zwar die einzige reelle positive Wurzel dieser Gleichung.

Die Gleichung (12) lässt sich aber nun für die Werte (8), (9), (10) von γ_2 in acht rationale Factoren (in Bezug auf x) spalten und man erhält so:

$$\begin{array}{lll} m = 43, & x^3 - 2x - 2 = 0, & \text{Discriminante } -4.43, \\ m = 67, & x^3 - 2x^2 - 2x - 2 = 0,^1 & \text{Discriminante } -4.67, \\ m = 163, & x^3 - 6x^2 + 4x - 2 = 0, & \text{Discriminante } -4.163. \end{array} \tag{13}$$

Wir wollen die Resultate der beiden letzten Paragraphen noch auf ein anderes Beispiel anwenden, welches ebenfalls eine gewisse allgemeinere Bedeutung hat, auf die Determinante — 58. Für diese Determinante existiren zwei Geschlechter quadratischer Formen und in jedem Geschlecht eine Classe. Nach Abhandlung I, § 21 lässt sich also jede Classeninvariante für diese Determinante rational durch $\sqrt{29}$ ausdrücken.[2]

[1] Diese Gleichung lässt sich auch leicht auf algebraischem Wege aus der Modulargleichung für den Transformationsgrad 71 herleiten.

[2] Dass $\sqrt{29}$, nicht $\sqrt{2}$ zu adjungieren ist, zeigt die dortige Formel (17), in welcher $m' = 2$, $m'' = 29$ zu setzen ist. Da in der Teilgleichung i nicht vorkommen kann, so muss zugleich $\sqrt{2}$ heraus fallen.

Nimmt man als Repräsentanten der beiden Classen (1, 0, 58), (2, 0, 29), so kommen diese in den Gruppen II, III (§ 7, 6) vor so dass

$$f_1(\sqrt{-58})^8, \quad f_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-58}\right)^8$$

als die beiden Classeninvarianten zu betrachten sind. Es ist daher

$$\begin{aligned} f_1(\sqrt{-58})^8 &= a + b\sqrt{29}, \\ (14) \qquad f_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-58}\right)^8 &= a - b\sqrt{29}, \end{aligned}$$

$$(15) \qquad a^2 - 29b^2 = 16 \qquad (\S\ 1,\ 15)$$

und a, b sind ganze (positive [1]) Zahlen.

Aus (14) folgt aber

$$2a = f_1(\sqrt{-58})^8 + f_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-58}\right)^8$$

wonach der Wert von $2a$ mit hinlänglicher Genauigkeit durch das erste Glied der Entwicklung

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{58}}$$

dargestellt ist. Es ergiebt sich so

$$a = 2.727, \qquad b = 2.135$$

also

$$f_1(\sqrt{-58})^8 = 2(727 + 135\sqrt{29})$$

---

[1] Aus der Formel (I, § 7, 2)

$$dk^2 = \pi i \vartheta_{00}^4 k^2 k'^2 d\omega$$

folgt, dass wenn $-i\omega$ reell ist, k^2 mit wachsendem $-i\omega$ abnimmt. Es ist also

$$f_1(\omega)^{24} - f_2(\omega)^{24} = \frac{(1-2k^2)(1-k^2k'^2)}{k^2k'^2}$$

positiv, also $f_1(\omega) > f_2(\omega)$ sobald $-i\omega > 1$ und da $f_1(\omega)^{24} = 2^4k'^4 : k^2$ mit wachsendem $-i\omega$ wächst während $f_2(\omega)^{24} = 2^4k^4 : k'^2$ abnimmt, so ist $f_1(\omega) > f_2\left(\frac{1}{2}\omega\right)$ sobald $-i\omega$ den Wert überschritten hat, für welchen $f_1(\omega) = f_2\left(\frac{1}{2}\omega\right)$ ist, d. h. den Wert $\sqrt{2}$.

woraus sich die vierte Wurzel ziehen lässt:

(16) $$\sqrt{2} f_1(\sqrt{-58})^2 = 5 + \sqrt{29}.$$

§ 9. *Berechnung von Classeninvarianten aus der Transformation erster und zweiter Ordnung.*

Wir benutzen nun die Principien des ersten Abschnitts zur Berechnung von Classeninvarianten, und gehen dabei aus von den Formeln des § 1.

Man erhält zunächst für $m = 1$ und $m = 3$ die beiden Gleichungen

$$\omega = -\frac{1}{\omega}, \qquad \omega = -\frac{1}{\omega + 1}$$

woraus nach (13), (14), (9), (10) § 1 folgt

(1) $$m = 1, \qquad f(i) = \sqrt[4]{2}, \qquad f_1(i) = f_2(i) = \sqrt[8]{2},$$

(2) $$m = 3, \qquad f\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) = f_1\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) e^{[illegible]}$$

$$f_2\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) e^{[illegible]} = \sqrt[3]{2}.$$

und nach § 1 (15)

(3) $$f(\sqrt{-3}) = \sqrt[3]{2}.$$

Aus der Transformation 2^{ter} Ordnung erhält man die Fälle $m = 2$, $m = 7$:

$$\omega = -\frac{2}{\omega}, \qquad \omega = -\frac{2}{\omega + 1}.$$

(4) $$m = 2, \qquad f_1(\sqrt{-2}) = \sqrt[4]{2}.$$

(5) $$m = 7, \qquad f(\sqrt{-7}) = \sqrt{2}, \qquad f\left(\frac{3+\sqrt{-7}}{4}\right) = 1;$$

und durch eine zweimalige Anwendung $m = 15$. Setzt man nämlich

$$\omega = \frac{1+\sqrt{-15}}{2}, \qquad \frac{\omega - 1}{2} = -\frac{2}{\omega},$$

(6) $$f(\sqrt{-15}) f_2(\omega) e^{[illegible]} = \sqrt{[illegible]}$$

so folgt

$$f\left(\frac{\omega-1}{2}\right) = f\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad f(\omega)\,f_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{24}},$$

$$f_1\left(\frac{\omega-1}{2}\right) = f_2\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad f_1(\omega)\,f_2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2},$$

$$f_2\left(\frac{\omega-1}{2}\right) = f_1\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad f_2(\omega)\,f\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{\frac{\pi i}{24}}.$$

Eliminiert man aus letzterem System $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $f_1\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $f_2\left(\frac{\omega}{2}\right)$ mittels § 1, (9), (10), so ergiebt sich

$$f_2^{48} + 47 f_2^{24} + 1 = 0$$

und daraus nach (6)

(7) $$m = 15; \qquad f(\sqrt{-15})^3 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Beachtet man, dass von den drei Functionen f^8, f_1^8, f_2^8 nach § 1, (9), (10), zwei durch die dritte mit Hilfe einer quadratischen Gleichung ausgedrückt werden, so lässt sich aus einer bekannten Classeninvariante für die Determinante $-m$ die für die Determinante $-4m$ herleiten, indem man sich, je nachdem m gerade oder ungerade ist, einer der beiden Formeln bedient:

(8) $$2 f_1(2\omega)^8 = f_1(\omega)^4 [f_1(\omega)^{12} + \sqrt{f_1(\omega)^{24} + 64}],$$

(9) $$2 f_1(2\omega)^8 = f(\omega)^4 [f(\omega)^{12} + \sqrt{f(\omega)^{24} - 64}].$$

Auf diese Weise findet man aus (1), (4), (5), (7) die folgenden Resultate:

(10) $$m = 4, \qquad f_1(\sqrt{-4})^8 = 8.$$

(11) $$m = 16, \qquad f_1(\sqrt{-16})^8 = 8\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^2.$$

(12) $$m = 8, \qquad f_1(\sqrt{-8})^8 = 8(1 + \sqrt{2}).$$

(13) $$m = 32, \qquad f_1(\sqrt{-32})^8 = 8x,$$

$$x^2 - 8(1 + \sqrt{2})^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) = 0.$$

$$(14) \qquad m = 12, \qquad f_1(\sqrt{-12})^4 = 2\sqrt[6]{2}(1 + \sqrt{3}).$$

$$(15) \qquad m = 28, \qquad f_1(\sqrt{-28})^4 = 2\sqrt{2}(3 + \sqrt{7}).$$

$$(16) \qquad m = 60, \qquad f_1(\sqrt{-60})^4 = \sqrt{2}\sqrt[3]{2(1 + \sqrt{5})^2}(2 + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}).$$

§ 10. *Anwendung der Schläfli'schen Modulargleichungen zur Berechnung von Classeninvarianten.*

Die Schläfli'schen Modulargleichungen lassen sich in verschiedener Weise zur Aufstellung von Classeninvarianten benutzen. Das nächstliegende ist, dass man einen der bereits bekannten Werte von $f(\sqrt{-m})$ oder $f_1(\sqrt{-m})$ für u oder u_1 in diese Gleichungen einsetzt, wodurch man eine Gleichung für $f(\sqrt{-mn^2})$ oder $f_1(\sqrt{-mn^2})$ erhält, die man noch von überflüssigen Factoren, die sich leicht finden lassen, zu befreien hat.

Auf diese Weise ergiebt sich

$$(1) \qquad m = 9, \qquad f(\sqrt{-9})^3 = \sqrt[4]{2}(1 + \sqrt{3}).$$

$$(2) \qquad m = 25, \qquad f(\sqrt{-25}) = {\sqrt[4]{2}}^3(1 + \sqrt{5}).$$

$$(3) \qquad m = 49, \qquad \sqrt[4]{2}f(\sqrt{-49}) = x,$$

$$x^2 - (1 + \sqrt{7})x + 1 = 0.$$

$$(4) \qquad m = 18, \qquad f_1(\sqrt{-18})^3 = \sqrt[4]{2}(2 + \sqrt{6}).$$

$$(5) \qquad m = 50, \qquad {\sqrt[4]{2}}^3 f_1(\sqrt{-50}) = x + \frac{\sqrt{5}}{x - 1},$$

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0. \qquad \text{Discr.} - 4 \cdot 50.[1]$$

[1] Die Classengleichung ist hier vom 6^{ten} Grade und lässt sich durch Adjunction von $\sqrt{5}$ in zwei cubische Factoren zerlegen, die man aus obiger Formel leicht durch Elimination ableiten kann. Dass hier, wie in mehreren der folgenden Beispiele die Classeninvariante rational dargestellt ist durch $\sqrt{5}$ und die (einzige reelle) Wurzel einer rationalen cubischen Gleichung ist eine Eigentümlichkeit, die mit der Abel'schen Natur der Classengleichungen zusammenhängt, worauf ich bei einer nächsten Gelegenheit zurückzukommen hoffe. Diese rationalen cubischen Gleichungen entsprechen den Gauss'schen Perioden-Gleichungen in der Kreisteilung.

(6) $\quad m = 27, \qquad f(\sqrt{-27})^3 = 2x,$

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0. \qquad \text{Discr.} - 4 . 27.$$

(7) $\quad m = 75, \qquad \sqrt[3]{2} f(\sqrt{-75}) = x,$

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 4 = 4\sqrt{5}\,x.$$

(8) $\quad m = 36, \qquad f_1(\sqrt{-36})^3 = \sqrt[8]{8}\,x,$

$$x^2 - 4x - 2 = 2\sqrt{3}(x + 1).$$

(9) $\quad m = 100, \qquad x = \sqrt[8]{2} f_1(\sqrt{-100}),$

$$x^2 - x - 1 = \sqrt{5}(x + 1).$$

(10) $\quad m = 63, \qquad f(\sqrt{-63})^3 = \sqrt{2^3}\,x,$

$$x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0,$$

$$\sqrt{7}(x^2 - x + 1) = \sqrt{3}(x^2 + 3x - 1).$$

(11) $\quad m = 175, \qquad f(\sqrt{-175}) = \sqrt{2}\,x,$

$$x^4 - 4x^3 + x + 1,$$

$$2x^3 - 4x^2 + x - 3 = \sqrt{5}(2x^2 - x + 1).$$

Wenn man sodann in den SCHLÄFLI'schen Modulargleichungen für den n^{ten} Transformationsgrad $\omega = \sqrt{-n}$ setzt, so wird

$$f(\omega) = f\left(\frac{\omega}{n}\right) = f(\sqrt{-n})$$

und man hat $u = v$ und mithin $A = 2$ zu setzen. Auch hier findet man leicht die abzusondernden Factoren.

(12) $\quad m = 5, \qquad f(\sqrt{-5})^4 = 1 + \sqrt{5}.$

(13) $\quad m = 11, \qquad f(\sqrt{-11}) = x,$

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0. \qquad \text{Discr.} - 4 . 11.$$

(14) $\quad m = 13, \qquad f(\sqrt{-13})^4 = 3 + \sqrt{13}.$

$$(15)\qquad m = 17, \qquad f(\sqrt{-17})^2 = \sqrt{2}\,x,$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

$$(16)\qquad m = 19, \qquad f(\sqrt{-19}) = x,$$

$$x^3 - 2x - 2 = 0. \qquad \text{Discr.}\ -4\,.\,19.$$

Ein drittes Verfahren, die SCHLÄFLI'schen Gleichungen unserer Aufgabe nutzbar zu machen, ist das folgende:

Setzen wir in der zum Transformationsgrad n gehörigen Modulargleichung für ω die Wurzel der quadratischen Gleichung

$$(17)\qquad 2\omega^2 + 2r\omega + n = 0,$$

worin r eine ganze Zahl bedeutet, also

$$(18)\qquad 2\omega + 2r = -\frac{n}{\omega},$$

$$\omega = \frac{-r + \sqrt{-m}}{2},$$

$$(19)\qquad m = 2n - r^2,$$

so ist (nach § 1, 15)

$$(20)\qquad f_2(\omega)f_1(2\omega + 2r) = e^{-\frac{r\pi i}{12}}\sqrt{2},$$

also nach (18)

$$(21)\qquad f_2(\omega)f_2\left(\frac{\omega}{n}\right) = \sqrt{2}\,e^{-\frac{r\pi i}{12}}.$$

$$(22)\qquad \begin{aligned} f_2(\omega) &= \frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{r\pi i}{24}}}{f(\sqrt{-m})}, \quad r \text{ ungerade}, \\ &= \frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{r\pi i}{24}}}{f_1(\sqrt{-m})}, \quad r \text{ gerade}. \end{aligned}$$

Demnach hat man in dem zweiten System § 4 zu setzen

$$(23) \qquad u_1 v_1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i}{12}},$$

$$(24) \qquad u_1 = \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i}{24}}}{v}, \qquad v_1 = e^{\frac{\pi i}{24}}\, v,$$

$$v = f(\sqrt{-m}), \quad f_1(\sqrt{-m})$$

je nachdem r und damit zugleich m ungerade oder gerade ist.

Nach (19) ergeben sich für m folgende Werte

$$\begin{array}{ll}
n = 3, & m = 6,\ 5,\ 2, \\
n = 5, & m = 10,\ 9,\ 6,\ 1, \\
n = 7, & m = 14,\ 13,\ 10,\ 5, \\
n = 11, & m = 22,\ 21,\ 18,\ 13,\ 6, \\
n = 13, & m = 26,\ 25,\ 22,\ 17,\ 10,\ 1, \\
n = 17, & m = 34,\ 33,\ 30,\ 25,\ 18,\ 9, \\
n = 19, & m = 38,\ 37,\ 34,\ 29,\ 22,\ 13,\ 2.
\end{array}$$

Wir leiten aus dieser Quelle nur die Formeln für die in dem Obigen noch nicht enthaltenen Fälle her, wobei die schon bekannten oder mehrfach auftretenden Werte zur Erleichterung der Auffindung der Factoren dienen.

$$(25) \qquad m = 6, \qquad f_1(\sqrt{-6})^6 = 4 + 2\sqrt{2},$$

$$(26) \qquad m = 10, \qquad \sqrt{2}\, f_1(\sqrt{-10})^2 = 1 + \sqrt{5},$$

$$(27) \qquad m = 14, \qquad f_1(\sqrt{-14})^2 = \sqrt{2}\, x,$$

$$x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2}.$$

$$(28) \qquad m = 21, \qquad 2 f(\sqrt{-21})^{12} = (\sqrt{3} + \sqrt{7})^3 (3 + \sqrt{7})^2.$$

$$(29) \qquad m = 22, \qquad f_1(\sqrt{-22})^2 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}).$$

(30) $\quad m = 26, \quad f_1(\sqrt{-26})^2 = x + \dfrac{2\sqrt{13}}{x^2 - 3}.$

$$x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0. \qquad \text{Discr.} - 16.26.$$

(31) $\quad m = 30, \quad f_1(\sqrt{-30})^6 = 2\sqrt{2}(3 + \sqrt{10})(2 + \sqrt{5}).$

(32) $\quad m = 33, \quad \sqrt{2}f(\sqrt{-33})^6 = (3 + \sqrt{11})(1 + \sqrt{3})^3.$

(33) $\quad m = 34, \quad f_1(\sqrt{-34})^2 = \sqrt{2}x,$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

(34) $\quad m = 29, \quad f(\sqrt{-29})^4 = 2x.$

$$2x^3 - 9x^2 - 8x - 5 = \sqrt{29}(x + 1)^2.$$

(35) $\quad m = 37, \quad f(\sqrt{-37})^4 = 12 + 2\sqrt{37}.$

(36) $\quad m = 38, \quad f_1(\sqrt{-38})^4 = \sqrt{2}x,$

$$(x^3 - 8x^2 + 16x - 8) = \sqrt{2}(8x^2 - 8x + 6).$$

Die gefundenen Resultate lassen sich wieder mit der Transformation zweiter Ordnung verbinden, und man erhält so z. B. noch aus (12), (14), (25)

(37) $\quad m = 20, \quad f_1(\sqrt{-20})^4 = 2\sqrt{2}x,$

$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(2x + 1).$$

(38) $\quad m = 52, \quad f_1(\sqrt{-52})^4 = 2\sqrt{2}x,$

$$x^2 - 2(4 + \sqrt{13})x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 0$$

(39) $\quad m = 24, \quad f_1(\sqrt{-24})^{24} = 2^9(1 + \sqrt{2})^2(2 + \sqrt{3})^3(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3.$

Endlich lassen sich auch noch zwei der Schläfli'schen Modulargleichungen mit einander combinieren und durch Elimination neue Resultate herleiten. Wir geben zwei verschiedene Beispiele der Combination

der Modulargleichungen für den 5^{ten} und den 11^{ten} Transformationsgrad mit sich selbst, wodurch wir die Classeninvarianten für die Determinanten -41, -105 erhalten, von denen die erste zwei Geschlechter mit je vier Classen, die zweite acht Geschlechter mit je einer Classe hat, und welche beide als erste ihrer Art von Interesse sind.

Nehmen wir zunächst

$$(40) \qquad 10\omega^2 + 6\omega + 5 = 0, \qquad 10\omega = -3 + \sqrt{-41},$$

$$f_2\left(\frac{\omega}{5}\right) = f_1[2(5\omega + 3)] = e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{\sqrt{2}}{f_2(5\omega)},$$

$$f_1\left(\frac{\omega}{5}\right) = f_1(10\omega + 6) = e^{-\frac{\pi i}{8}} f(\sqrt{-41}), \qquad f_2(5\omega) = e^{-\frac{\pi i}{8}} \frac{\sqrt{2}}{f(\sqrt{-41})}.$$

Hiernach ergeben sich aus der Modulargleichung für den 5^{ten} Grad (§ 4, II) zwei Gleichungen, die sich mit Benutzung der Bezeichnung

$$f(\sqrt{-41}) = f(\omega) e^{\frac{5\pi i}{8}} \eta, \qquad f(\sqrt{-41}) f(\omega) e^{\frac{5\pi i}{8}} = \sqrt{2}\,\xi,$$

so schreiben lassen:

$$\xi^3 + \frac{1}{\xi^3} + 2\left(\eta^2 - \frac{1}{\eta^2}\right) = 0,$$

$$\eta^3 + \frac{1}{\eta^3} + 2\left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2}\right) = 0.$$

Durch Addition und Subtraction erhält man hieraus zwei Gleichungen, welche nach Beseitigung des Factors $\xi - \eta$ (der zu den Determinanten -1, -25 gehört) nur noch von $\xi + \eta$ und $\xi\eta$ abhängen.

Die Elimination von $\xi + \eta$ liefert, wenn wir

$$\sqrt{2}\,\xi\eta = \sqrt{2}\,x = f(\sqrt{-41})^2, \qquad x + \frac{1}{x} = z$$

setzen, die Gleichung

$$0 = z^6 - 9z^5 + 20z^4 + 6z^3 - 19z^2 - 17z - 6$$

$$= (z^2 - 4z - 3)(z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 3z + 2).$$

Der erste Factor, der als zur Determinante -49 gehörig, von vorn herein bekannt ist, wird abgeworfen, und der zweite liefert die gesuchte Glei-

chung, welche in Bezug auf x vom 8^{ten} Grade ist, und sich durch Adjunction von $\sqrt{41}$ zerlegen lässt. Man erhält so

$$(41) \qquad m = 41, \qquad 2z^2 - 5z + 7 = \sqrt{41}(z - 1).$$

Es genüge zweitens ω der Gleichung

$$(42) \qquad 11\omega^2 + 8\omega + 11 = 0,$$

also

$$11\omega + 8 = -\frac{11}{\omega}, \qquad 11\omega = -4 + \sqrt{-105}.$$

Demnach, wenn

$$f(\sqrt{-105}) = x$$

gesetzt wird

$$f(11\omega) = e^{\frac{\pi i}{6}} x, \qquad f\left(\frac{\omega}{11}\right) = e^{-\frac{\pi i}{6}} x,$$

und diese beiden Grössen sind, wenn $u = f(\omega)$ ist, Wurzeln der Modulargleichung für den 11^{ten} Transformationsgrad. (§ 4, I.)

Setzt man $ux = \xi$, $x : u = \eta$ so folgt

$$A = -\left(\eta^6 + \frac{1}{\eta^6}\right), \qquad B = e^{\frac{\pi i}{6}} \xi - \frac{2e^{-\frac{\pi i}{6}}}{\xi},$$

so dass man durch Benutzung beider Zeichen für ξ, η zwei Gleichungen erhält. Durch Elimination von A und Fortheben des Factors

$$\xi + \frac{2}{\xi}$$

findet sich

$$\xi^4 + \frac{16}{\xi^4} - 24\left(\xi^2 + \frac{4}{\xi^2}\right) + 92 = 0,$$

woraus

$$\xi^2 = (2 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{5}) = \frac{(1 + \sqrt{3})^2(1 + \sqrt{5})^2}{4}.$$

Für η findet man sodann

$$\eta^6 + \frac{1}{\eta^6} = 660 + 168\sqrt{15}.$$

woraus leicht folgt:

$$(43) \quad m = 105, \quad 64\sqrt{2}f(\sqrt{-105})^6 = (1+\sqrt{3})^3(1+\sqrt{5})^3(\sqrt{3}+\sqrt{7})^3(\sqrt{5}+\sqrt{7}).$$

Die Richtigkeit der Vorzeichen ergiebt sich durch die Vergleichung der numerischen Werte.

§ 11. *Anwendung der irrationalen Modulargleichungen zur Berechnung von Classeninvarianten.*

Genau in derselben Weise lassen sich die in § 5, § 6 abgeleiteten irrationalen Formen der Modulargleichungen anwenden und führen zum Teil in ausserordentlich einfacher Weise zum Ziele. Wenn wir zunächst in den Formeln (4) § 5 $\omega = \sqrt{-n}$ setzen, so wird

$$2A = f(\omega)^2 + (-1)^{\frac{n+1}{8}} \frac{2\sqrt{2}}{f(\omega)}, \qquad B = 2\sqrt{2}f(\omega) + (-1)^{\frac{n+1}{8}} \frac{2}{f(\omega)^2}$$

oder für

$$f(\omega) = \sqrt{2}x,$$

$$A = \frac{x^3 + (-1)^{\frac{n+1}{8}}}{x}, \qquad B = \frac{4x^3 + (-1)^{\frac{n+1}{8}}}{x^2},$$

und dies ist in die Formeln (6) § 5 einzusetzen. Für $n = 31$ erhält man zunächst eine Gleichung 3^{ten} Grades in x^3, aus der sich durch Factorenzerfällung eine einfachere für x selbst herleiten lässt. Bei $n = 47$, $n = 71$ hat man bezügl. die Factoren x, $(x+1)^2$ abzusondern und findet so:

$$(1) \quad n = 23, \quad f(\sqrt{-23}) = \sqrt{2}x, \quad x^3 - x - 1 = 0.$$

$$(2) \quad n = 31, \quad f(\sqrt{-31}) = \sqrt{2}x, \quad x^3 - x^2 - 1 = 0.$$

$$(3) \quad n = 47, \quad f(\sqrt{-47}) = \sqrt{2}x, \quad x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$(4) \quad n = 71, \quad f(\sqrt{-71}) = \sqrt{2}x, \quad x^7 - 2x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0.$$

Ebenso lässt sich auch das dritte Verfahren des vorigen Paragraphen hier anwenden, indem man von den Formeln (17), (18), (19) Gebrauch macht. Man erhält aber dann nicht unmittelbar Gleichungen für eine

der Functionen f selbst, sondern Relationen zwischen mehreren derselben, aus denen die einfachen Gleichungen erst durch Elimination herzustellen sind. Aus der für $n = 23$ gültigen Modulargleichung erhält man so z. B., wenn ω der Gleichung genügt:

$$2\omega^2 + 2r\omega + 23 = 0,$$

$$f(\omega)f(2\omega + 2r) - f_1(\omega)f_2(2\omega + 2r) = 2 + \sqrt{2}e^{\frac{r\pi i}{12}},$$

und die Rechnung für $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$ ergiebt

(5) $\quad m = 42, \qquad 2\sqrt{2}f_1(\sqrt{-42})^6 = (2\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7})^3.$

(6) $\quad m = 45, \qquad f(\sqrt{-45})^{12} = 8(2 + \sqrt{5})^3(4 + \sqrt{15})^2.$

(7) $\quad m = 46, \qquad f_1(\sqrt{-46})^2 = \sqrt{2}x,$

$$x + \frac{1}{x} = 3 + \sqrt{2}.$$

In ähnlicher Weise findet man aus der Modulargleichung für $n = 19$ (§ 5, 10) eine einfachere Form der Darstellung für $m = 38$. Setzt man

$$4x = f(\sqrt{-38})^2 f\left(\sqrt{\frac{-19}{2}}\right)^2 - f_2(\sqrt{-38})^2 f_1\left(\sqrt{\frac{-19}{2}}\right)^2 - 2$$

so ergiebt sich

$$A = x, \qquad B = 8x + 6$$

und, nach Absonderung des Factors $x^2 + x + 3$:

(8) $\quad x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0, \qquad$ Discr. $-4 \, . \, 38,$

während $f_1(\sqrt{-38})^2$ sich so durch x ausdrücken lässt:

(9) $\quad \sqrt{2}f_1(\sqrt{-38})^2 = x + 1 - \sqrt{2}$ [illegible]

Es sollen endlich noch für $m = 35, 39, 55$ die Modulargleichungen (17), (21), § 6, verwendet werden. Setzen wir

$$x = f(\sqrt{-35}), \qquad x' = f\left(\sqrt{\frac{-7}{5}}\right), \qquad xx' = y, \qquad \frac{x^2 + x'^2}{xx'} = z,$$

[1] Man vgl. die Anmerkung zu § 10 (5).

so ergiebt sich aus (17), (21)

(10) $$y^3 - 2y^2 - 4 = 0. \qquad \text{Discr.} - 16.35.$$

(11) $$z^3 + z^2 - 5z - 7 = 0. \qquad \text{Discr.} - 4.35.$$

Die zweite dieser Gleichungen geht in die erste über durch die Substitution

(12) $$y = z^2 - 3,$$

wodurch, da die Gleichungen beide nur eine reelle Wurzel haben, y rational durch z ausgedrückt ist.

Ebenso ist

(13) $$2(z + 1) = y^2,$$

wonach man nach Adjunction von $\sqrt{5}$ auch x rational durch y ausdrücken kann:

$$f(\sqrt{-35}) = y^2 + \frac{4\sqrt{5}}{y + 2}.$$[1]

Für $m = 39$ ergiebt die Gleichung (21) § 6, wenn

$$x = f(\sqrt{-39}), \qquad x' = f\left(\sqrt{\frac{-3}{13}}\right), \qquad \frac{x^2 + x'^2}{xx'} = z, \qquad x^3 x'^3 = y$$

gesetzt wird, nach Abwerfung des Factors $z + 2$

(15) $$z^2 - z - 3 = 0, \qquad z = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Die Gleichung für xx' erhält man aus der Transformation 3^{ter} Ordnung: (§ 4, I, mit Benutzung von 15)

$$\frac{x^{12} + x'^{12}}{x^6 x'^6} + \frac{8}{y} - y = 0,$$

woraus

$$y = 4(3 + \sqrt{13}).$$

---

[1] Aus dem 71^{ten} Transformationsgrad erhält man direct für $x = f(\sqrt{-35})$ die Gleichung $x^3 - 2 = (1 + \sqrt{5})(x^2 - x)$.

Setzt man schliesslich

(16) $$f(\sqrt{-39})^3 = \sqrt{2}^3 x$$

so ergiebt sich für x die quadratische Gleichung:

(17) $$x^2 - \frac{3 + \sqrt{13}}{2}(x + 1) = 0.$$

Für $m = 55$ setzen wir

$$f(\sqrt{-55})f\left(\sqrt{\frac{-11}{5}}\right) = z$$

und erhalten aus (17), § 6

$$A = \frac{z^3 - 4}{2z}, \qquad B = \frac{4(z^3 - 4)}{z^2},$$

$$0 = z^9 - 8z^7 - 12z^6 - 4z^5 + 32z^4 + 80z^3 + 16z^2 - 96z - 64$$
$$= (z^2 - 2z - 4)(z^2 - 2)^2(z^3 + 2z^2 + 4z + 4).$$

Der letzte Factor (der zur Determinante -11 gehört) hat hier keine positive Wurzel, und da z^2 nicht $= 2$ ist, so muss

$$z^2 - 2z - 4 = 0, \qquad z = 1 + \sqrt{5}$$

sein. Setzt man

(18) $$\sqrt{2}x = f(\sqrt{-55}), \qquad \sqrt{2}x' = f\left(\sqrt{\frac{-11}{5}}\right)$$

so liefert noch die Transformation fünfter Ordnung

$$x^6 + x'^6 = \frac{43 + 19\sqrt{5}}{2}$$

und daraus

$$x^2 + x'^2 = 2 + \sqrt{5}, \qquad x - x' = 1,$$

also

(19) $$x^2 - x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

§ 12. *Die Multiplicatorgleichungen.*

In der Abhandlung I, § 15, sind aus dem Teilungsproblem der elliptischen Functionen zwei Arten von Transformationsgleichungen abgeleitet, die sich dadurch unterscheiden, dass die Wurzeln der einen aus geraden, die der anderen aus ungeraden elliptischen Functionen der Periodenteile zusammengesetzt sind. Die ersten heissen *Modulargleichungen,* die anderen *Multiplicatorgleichungen.*

Die letzteren gestatten eine wesentliche Vereinfachung im Falle eines quadratischen Transformationsgrades.[1] Diese Multiplicatorgleichungen, welche in umfassender Weise von KIEPERT studiert sind,[2] zeigen in ihren Zahlencoëfficienten nicht die Einfachheit wie die SCHLÄFLI'schen oder die irrationalen Modulargleichungen, so dass diese für die practischen Rechnungen, die sich auf die complexe Multiplication beziehen, geeigneter sind. Nur in dem Fall eines quadratischen Transformationsgrades ist in Vergleich zur Höhe des Transformationsgrades die Einfachheit der Multiplicatorgleichung eine genügende um mit Vorteil hier verwandt zu werden. Ich gehe hier um so lieber auf das Beispiel des 25^{ten} Transformationsgrades ein, weil dasselbe eine unmittelbare Anwendung der allgemeinen Methode liefert, durch welche ich im § 21 der Abhandlung I die Zerfällung der Classengleichungen in Factoren nachgewiesen habe.

Nach § 16 der Abhandlung I sind die ν Grössen

$$(1) \qquad \left(\frac{c}{e}\right) i^{\frac{a-1}{2}} \sqrt{d}\, \frac{\eta\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)}{\eta(\omega)} = t,$$

falls $ad = n$ eine durch 2 und 3 nicht teilbare Quadratzahl, $c \equiv 0 \pmod{24}$ und e der grösste gemeinschaftliche Teiler von a, d ist, die Wurzeln

[1] Diese Vereinfachung der Multiplicatorgleichung im Falle eines quadratischen Transformationsgrades hat zuerst JOUBERT nachgewiesen: *Sur les équations, qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques,* Paris 1876.

[2] Besonders in der Abhandlung *Über die Transformation der elliptischen Functionen,* Mathematische Annalen, Bd. 26.

einer Gleichung ν^{ten} Grades, welche rational von $j(\omega)$ abhängt. Ist $n = 25$ so lässt sich dieser Gleichung die folgende einfache Form geben [1]

$$(2) \qquad j(\omega) = \frac{(\chi^2 + 10\chi + 5)^3}{\chi},$$

wenn zur Abkürzung

$$(3) \qquad \chi = t^5 + 5t^4 + 15t^3 + 25t^2 + 25$$
$$= t^3 \left\{ \left(t + \frac{5}{t}\right)^2 + 5\left(t + \frac{5}{t}\right) + 5 \right\}$$

gesetzt wird.

Es sei nun r eine ungerade Zahl und ω Wurzel der quadratischen Gleichung (zweiter Art)

$$(4) \qquad \omega^2 + r\omega + 25 = 0,$$

$$(5) \qquad \omega = \frac{-r + \sqrt{-m}}{2}, \qquad m = 100 - r^2,$$

so ist, wenn c aus der Congruenz

$$(6) \qquad c \equiv r \pmod{25}, \qquad c - r \equiv -25r \pmod{24}$$

bestimmt wird,

$$(7) \qquad \frac{c + \omega}{25} = \frac{c - r}{25} - \frac{1}{\omega}$$

und es wird daher für den Wert (5) von ω eine Wurzel der Gleichung (2)

$$(8) \qquad t = \frac{\eta\left(\frac{c - r}{25} - \frac{1}{\omega}\right)}{\eta(\omega)} = e^{\frac{\text{[illegible]}}{12}} \sqrt{-i\omega}$$

worin die $\sqrt{-i\omega}$ mit positivem reellen Teil zu nehmen ist. (Abh. I, § 5.)

[1] Vgl. I. Gierster, *Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad*, Math. Annalen, Bd. 14 und Kiepert l. c.

Wir betrachten die Werte $r = 1, 3, 7$ und erhalten

$$r = 1, \qquad m = 99, \qquad t = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{3}} (3 + i\sqrt{11}),$$

$$r = 3, \qquad m = 91, \qquad t = \frac{1}{2} (\sqrt{13} - i\sqrt{7}),$$

$$r = 7, \qquad m = 51, \qquad t = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{3}} (\sqrt{17} - i\sqrt{3})$$

und hiernach lässt sich aus (2) $j(\omega)$ berechnen, welches für $r = 3$ ein Cubus wird.

Auf diese Weise berechnet man ziemlich einfach die folgenden Zahlen

$$\gamma_2\left(\frac{-3 + \sqrt{-91}}{2}\right) = -48(227 + 63\sqrt{13}),$$

(9) $$j\left(\frac{-7 + \sqrt{-51}}{2}\right) = -2^{14}.27(6263 + 1519\sqrt{17}),$$

$$j\left(\frac{-1 + \sqrt{-99}}{2}\right) = -2^{12}(4591804316 + 799330532\sqrt{33}).$$

Von diesen Werten gelangt man zu den viel einfacheren Gleichungen für die Grössen $f(\sqrt{-m})$ in derselben Weise wie in § 8.

Es ist nämlich nach § 1

$$f_2\left(\frac{-r + \sqrt{-m}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{r\pi i}{24}}}{f(\sqrt{-m})},$$

$$\gamma_2\left(\frac{-r + \sqrt{-m}}{2}\right) e^{\frac{r\pi i}{3}} = \frac{f(\sqrt{-m})^{24} - 16^2}{f(\sqrt{-m})^{16}}.$$

Setzt man also für $r = 3$

$$f(\sqrt{-m}) = x$$

so ergiebt sich für x die Gleichung

(10) $$x^{24} + \gamma_2(\omega) x^{16} - 16^2 = 0;$$

und wenn man für $r = 7$, 1

$$f(\sqrt{-m}) = 2x$$

setzt, so folgt für diese beiden Fälle:

$$x^{24} - [3 - 2^{-8}j(\omega)]x^{16} + 3x^8 - 1 = 0 \tag{11}$$

und in (10) und (11) hat man für $\gamma_2(\omega)$ und $j(\omega)$ die Werte (9) einzusetzen. Jede dieser Gleichungen lässt sich aber successive in zwei in Bezug auf x^4, x^2, x rationale cubische Gleichungen zerfällen wie man leicht findet und noch leichter nachträglich verificiert. Man erhält so die Classengleichungen:

$$m = 51, \qquad f(\sqrt{-51})^3 = 2x,$$
$$x^3 - (4 + \sqrt{17})x^2 - x - 1 = 0.$$

$$m = 91, \qquad f(\sqrt{-91}) = x,$$
$$x^3 - 2x^2 - (1 + \sqrt{13})x - 2 = 0.$$

$$m = 99, \qquad f(\sqrt{-99})^3 = 2x,$$
$$x^3 - (13 + 2\sqrt{33})x^2 - (4 + \sqrt{33})x - 1 = 0.$$

§ 12. *Zusammenstellung.*

Zur bequemeren Übersicht sollen hier noch einmal die die complexe Multiplication betreffenden Resultate zusammengestellt werden, und zwar geordnet nach der von Gauss gegebenen Einteilung (Disq. ar. art. 303; vgl. auch die in Bd. 2 von Gauss Werken aus dem Nachlass herausgegebene Tafel der Classenzahlen), so dass die römische Ziffer die Anzahl der Genera, die arabische Ziffer die Anzahl der in einem Genus enthaltenen Classen quadratischer Formen von der Determinante $-m$ angiebt. Die Fälle $m = 40, 48, 72, 88, 112, 232$, die nach den Formeln (8), (9), § 9, aus den Fällen $m = 10, 12, 18, 22, 28, 58$ leicht zu berechnen sind, welchen die Classification IV, 1 zukommt, sind hier noch beigefügt. Es ist bemerkenswert, dass die Fälle I, 1; I, 3; II, 1 erschöpft sind, wenigstens wenn die von Gauss (Disq. ar. l. c.) auf eine weitgehende Induction gegründete Vermuthung richtig ist.[1]

[1] Vgl. auch Joubert, Comptes rendus, t. 50, 1860.

I, 1.
$$f(\sqrt{-1}) = \sqrt[4]{2},$$
$$f_1(\sqrt{-2}) = \sqrt[4]{2},$$
$$f(\sqrt{-3}) = \sqrt[3]{2},$$
$$f_1(\sqrt{-4}) = \sqrt[8]{8},$$
$$f(\sqrt{-7}) = \sqrt{2}.$$

I, 3.
$$f(\sqrt{-11}) = x, \qquad x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0,$$
$$f(\sqrt{-19}) = x, \qquad x^3 - 2x - 2 = 0,$$
$$f(\sqrt{-23}) = \sqrt{2}\,x, \qquad x^3 - x - 1 = 0,$$
$$f(\sqrt{-27})^3 = 2x, \qquad x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0,$$
$$f(\sqrt{-31}) = \sqrt{2}\,x, \qquad x^3 - x^2 - 1 = 0,$$
$$f(\sqrt{-43}) = x, \qquad x^3 - 2x - 2 = 0,$$
$$f(\sqrt{-67}) = x, \qquad x^3 - 2x^2 - 2x - 2 = 0,$$
$$f(\sqrt{-163}) = x, \qquad x^3 - 6x^2 + 4x - 2 = 0.$$

I, 5.
$$f(\sqrt{-47}) = \sqrt{2}\,x, \qquad x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

I, 7.
$$f(\sqrt{-71}) = \sqrt{2}\,x, \qquad x^7 - 2x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0.$$

II, 1.
$$f(\sqrt{-5})^4 = 1 + \sqrt{5},$$
$$f_1(\sqrt{-6})^6 = 4 + 2\sqrt{2},$$
$$f_1(\sqrt{-8})^8 = 8(1 + \sqrt{2}),$$
$$f(\sqrt{-9})^3 = \sqrt[4]{2}(1 + \sqrt{3}),$$
$$\sqrt{2}\,f_1(\sqrt{-10})^2 = 1 + \sqrt{5},$$
$$f_1(\sqrt{-12})^4 = 2\sqrt[3]{2}(1 + \sqrt{3}),$$
$$f(\sqrt{-13})^4 = 3 + \sqrt{13},$$
$$f(\sqrt{-15})^3 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{5}),$$
$$f_1(\sqrt{-16})^4 = 2\sqrt[4]{8}(1 + \sqrt{2}),$$

$$f_1(\sqrt{-18})^3 = \sqrt[4]{2}(2 + \sqrt{6}),$$
$$f_1(\sqrt{-22})^2 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}),$$
$$\sqrt[4]{8} f(\sqrt{-25}) = (1 + \sqrt{5}),$$
$$f_1(\sqrt{-28})^4 = 2\sqrt{2}(3 + \sqrt{7}),$$
$$f(\sqrt{-37})^4 = 2(6 + \sqrt{37}),$$
$$\sqrt{2} f_1(\sqrt{-58})^2 = 5 + \sqrt{29}.$$

II, 2.

$$f_1(\sqrt{-14})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2},$$

$$f(\sqrt{-17})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x + \frac{1}{x} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2},$$

$$f_1(\sqrt{-20})^4 = 2\sqrt{2}x, \qquad x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(2x + 1),$$

$$f_1(\sqrt{-32})^8 = 8x, \qquad x^2 - 8(1 + \sqrt{2})^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) = 0,$$

$$f_1(\sqrt{-34})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x + \frac{1}{x} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2},$$

$$f_1(\sqrt{-36})^3 = \sqrt[8]{8}x, \qquad x^2 - 4x - 2 = 2\sqrt{3}(x + 1),$$

$$f(\sqrt{-39})^3 = \sqrt{8}x, \qquad x^2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}(x + 1),$$

$$f_1(\sqrt{-46})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x + \frac{1}{x} = 3 + \sqrt{2},$$

$$f(\sqrt{-49})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x + \frac{1}{x} = 2 + \sqrt{7}$$

oder

$$\sqrt[4]{2} f(\sqrt{-49}) = x, \qquad x + \frac{2}{x} = 1 + \sqrt{7},$$

$$f_1(\sqrt{-52})^4 = 2\sqrt{2}x, \qquad x^2 - 2(4 + \sqrt{13})x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 0,$$

$$f(\sqrt{-55}) = \sqrt{2}x, \qquad x^2 - x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$f(\sqrt{-63})^3 = \sqrt{8}x, \qquad \sqrt{7}(x^2 - x + 1) = \sqrt{3}(x^2 + 3x - 1),$$

$$\sqrt[8]{2} f_1(\sqrt{-100}) = x, \qquad x^2 - x - 1 = \sqrt{5}(x + 1).$$

II, 3. $\sqrt{2}f_1(\sqrt{-26})^2 = x + \frac{2\sqrt{13}}{x^2-3}, \quad x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0,$

oder

$$f_1(\sqrt{-26})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x^3 - x^2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}(x+1),$$

$$f(\sqrt{-29})^4 = 2x, \qquad 2x^3 - 9x^2 - 8x - 5 = \sqrt{29}(x+1)^2,$$

$$4f(\sqrt{-35}) = x^2 + \frac{4\sqrt{5}}{x+2}, \quad x^3 - 2x^2 - 4 = 0,$$

oder

$$f(\sqrt{-35}) = x, \qquad x^3 - 2 = (1+\sqrt{5})(x^2 - x),$$

$$f_1(\sqrt{-38})^4 = \sqrt{2}x, \qquad x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = \sqrt{2}(8x^2 - 8x + 6),$$

oder

$$\sqrt{2}f_1(\sqrt{-38})^2 = x + 1 - \sqrt{2}\frac{x-3}{x-2}, \quad x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0,$$

$$\sqrt[4]{8}f_1(\sqrt{-50}) = x + \frac{2\sqrt{5}}{x^2-1}, \qquad x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0,$$

oder

$$f_1(\sqrt{-50}) = \sqrt[4]{2}x, \qquad x^3 - x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(x+1),$$

$$f(\sqrt{-51})^3 = 2x, \qquad x^3 - 4x^2 - x - 1 = \sqrt{17}x^2,$$

$$\sqrt[3]{2}f(\sqrt{-75}) = x, \qquad x^3 - 2x^2 - 2x - 4 = 4\sqrt{5}x,$$

$$f(\sqrt{-91}) = x, \qquad x^3 - 2x^2 - x - 2 = \sqrt{13}x,$$

$$f(\sqrt{-99})^3 = 2x, \qquad x^3 - 13x^2 - 4x - 1 = \sqrt{33}(2x^2 + x),$$

$$f(\sqrt{-175}) = \sqrt{2}x, \qquad 2x^3 - 4x^2 + x - 3 = \sqrt{5}(2x^2 - x + 1).$$

II, 4. $f(\sqrt{-41})^2 = \sqrt{2}x, \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{5+\sqrt{41}}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{7+\sqrt{41}}{2} = 0.$

IV, 1. $2f(\sqrt{-21})^{12} = (\sqrt{3} + \sqrt{7})^3(3 + \sqrt{7})^2,$

$$f_1(\sqrt{-24})^{24} = 2^9(1+\sqrt{2})^2(2+\sqrt{3})^3(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3,$$

$$f_1(\sqrt{-30})^6 = 2\sqrt{2}(3+\sqrt{10})(2+\sqrt{5}),$$

$$\sqrt{2}f(\sqrt{-33})^6 = (3+\sqrt{11})(1+\sqrt{3})^3,$$

$$f_1(\sqrt{-40})^8 = \sqrt{2}(1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{2})^2(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}),$$

$$2\sqrt{2}f_1(\sqrt{-42})^6 = (2\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})^3,$$

$$f(\sqrt{-45})^{12} = 2(2+\sqrt{5})^3(\sqrt{3}+\sqrt{5})^4,$$

$$f_1(\sqrt{-48})^8 = 8\sqrt[6]{2}(1+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2(1+\sqrt{2})^2,$$

$$f_1(\sqrt{-60})^{12} = 4\sqrt{2}(1+\sqrt{5})^2(2+\sqrt{3})^3(\sqrt{3}+\sqrt{5})^3,$$

$$f_1(\sqrt{-72})^{24} = 128(2+\sqrt{6})^4(1+\sqrt{2})^9(2+\sqrt{3})^6.$$

IV, 1. $$f_1(\sqrt{-88})^8 = 4(1+\sqrt{2})^2(3+\sqrt{11})^2(7\sqrt{2}+3\sqrt{11}),$$

$$f_1(\sqrt{-112})^8 = 8\sqrt{2}(3+\sqrt{7})(1+\sqrt{2})^4(2\sqrt{2}+\sqrt{7})^2,$$

$$f_1(\sqrt{-232})^8 = 2(5+\sqrt{29})^2(1+\sqrt{2})^6(99+13\sqrt{58}).$$

VIII, 1. $$\sqrt{2}^{13}f(\sqrt{-105})^6 = (1+\sqrt{3})^3(1+\sqrt{5})^3(\sqrt{3}+\sqrt{7})^3(\sqrt{5}+\sqrt{7}).$$

Marburg im April 1888.

Berichtigungen.

Das Theorem 2.) Seite 339 muss als unrichtig wegfallen. Auf die Resultate ist dieser Irrtum ohne Einfluss. Aus der Tafel (16) Seite 342 schliesst man, allein auf das Theorem 1.) § 1 gestützt, dass die Grössen $v:u^n$, oder wenn n durch 3 teilbar ist, deren Cuben, Wurzeln einer Transformationsgleichung sind, deren Coëfficienten rational aus u^{24} abhängen. Die Schlüsse auf Seite 347 werden nur in soweit berührt, als $r_1 = 1$

und r und s daher so bestimmt werden müssen, dass $(n-1)r$, $(n+1)s$ durch 12 teilbar sind, wie es auf Seite 348 ff. wirklich geschehen ist.

Seite 371. Formel (2) ist zu lesen

$$\sqrt[4]{8}f(\sqrt{-25}) = 1 + \sqrt{5},$$

Formel (3) zweite Zeile

$$x^2 - (1 + \sqrt{7})x + 2 = 0.$$

Seite 375. Formel (30)

$$\sqrt{2}f_1(\sqrt{-26})^2 = x + \frac{2\sqrt{13}}{x^2 - 3}.$$

BEMERKUNG ÜBER DIEJENIGEN FLÄCHEN BEI DENEN DIE DIFFERENZ DER HAUPTKRÜMMUNGSRADIEN CONSTANT IST

VON

R. v. LILIENTHAL
in BONN.

Im 59ten Bande des Journals für Mathematik hat Herr WEINGARTEN den Satz aufgestellt und bewiesen, dass die dem Hauptkrümmungshalbmesser ρ_1 entsprechenden Krümmungsmittelpunktsflächen derjenigen Flächen, bei denen der Hauptkrümmungshalbmesser ρ_2 durch dieselbe Function von ρ_1 ausgedrückt wird, sämmtlich auf eine unter ihnen befindliche Rotationsfläche abwickelbar sind. Speciell sind die Krümmungsmittelpunktsflächen der Minimalflächen auf die Rotationsfläche jeder Kettenlinienevolute abwickelbar.

Der letzteren Bemerkung lässt sich die folgende an die Seite stellen. Die dem Hauptkrümmungshalbmesser ρ_1 entsprechenden Krümmungsmittelpunktsflächen sämmtlicher Flächen, bei denen $\rho_1 - \rho_2$ constant ist, sind auf die Rotationsfläche der Tractrix abwickelbar und besitzen somit ein constantes negatives Krümmungsmass. Dasselbe hat den Werth

$$-\frac{1}{c^2},$$

wenn $\rho_1 - \rho_2 = c$. Die Rotationsfläche der Tractrix selbst ist Krümmungsmittelpunktsfläche von einer Rotationsfläche, die sich durch geeignete Bestimmung der willkührlichen Constanten aus den Formeln des Herrn LIPSCHITZ (Acta Mathematica, Bd. 10, S. 136, (16)) ergiebt.

Es sei zunächst gestattet den allgemeinen Satz des Herrn Weingarten mit den Mitteln zu beweisen, die im 30ten Bande der Mathematischen Annalen, p. 1 u. folg. entwickelt sind. Man erhält für das Quadrat des Linearelements ds_1 der zu ρ_1 gehörenden Krümmungsmittelpunktsfläche die Gleichung:

$$ds_1^2 = (\rho_1 - \rho_2)^2[\sqrt{L}\sin\sigma dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)dq]^2 + d\rho_1^2.$$

Unter der Voraussetzung

$$\rho_2 = f(\rho_1)$$

lässt sich nun, wenn ρ_1 als unabhängige Variable genommen und gleich p gesetzt wird, ein Factor λ in der Weise bestimmen, dass

$$\lambda(\rho_1 - \rho_2)[\sqrt{L}\sin\sigma dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)dq]$$

ein vollständiges Differential wird.

Die hierzu erforderliche Differentialgleichung nimmt unter Berücksichtigung der Beziehung (l. c., p. 10, (6)):

$$(\rho_1 - \rho_2)\left\{\frac{\partial\sqrt{L}\sin\sigma}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)}{\partial p}\right\} = \frac{\partial\rho_2}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\rho_2}{\partial p}\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)$$

die Form an:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q}(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\lambda}{\partial p}(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)$$

$$+ \frac{\partial\rho_1}{\partial q}\lambda\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\rho_1}{\partial p}\lambda\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi) = 0.$$

Wird nun λ blos als Function von $p = \rho_1$ betrachtet, so folgt:

$$\lambda = e^{-\int\frac{d\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} + \text{Const.}},$$

und man kann setzen:

$$e^{-\int\frac{d\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}}(\rho_1 - \rho_2)[\sqrt{L}\sin\sigma dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)dq] = dq_1,$$

so dass:

$$ds_1^2 = e^{2\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}} dq_1^2 + d\rho_1^2$$

wird, woraus die Behauptung des Herrn WEINGARTEN unmittelbar erhellt.

Nimmt man nun im betrachteten Falle $\rho_1 - \rho_2$ gleich c und schreibt statt q_1 wieder q, so ergiebt sich:

$$ds_1^2 = e^{\frac{2\rho_1}{c}} dq^2 + d\rho_1^2.$$

Wir suchen jetzt diejenige Rotationsfläche auf, bei welcher das Quadrat des Linearelements die letztgefundene Form hat. Sind

$$\xi = p \cos q, \qquad \eta = p \sin q, \qquad \zeta = f(p)$$

die Coordinaten einer Rotationsfläche, ds das Linearelement der letzteren, so wird:

$$ds^2 = [1 + f'(p)^2] dp^2 + p^2 dq^2.$$

Daher sind p und $f(p)$ so als Functionen von ρ_1 zu bestimmen, dass:

$$p^2 = e^{\frac{2\rho_1}{c}}, \qquad [1 + f'(p)^2] dp^2 = d\rho_1^2$$

wird.

Nimmt man

$$p = e^{\frac{\rho_1}{c}},$$

so folgt:

$$f(p) = \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}} - \rho_1 + c \log\left(c - \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}}\right).$$

und:

$$\xi = e^{\frac{\rho_1}{c}} \cos q, \qquad \eta = e^{\frac{\rho_1}{c}} \sin q,$$

$$\zeta = \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}} - \rho_1 + c \log\left(c - \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}}\right).$$

Diese Gleichungen zeigen, dass wir es mit der Umdrehungsfläche der Tractrix zu thun haben. Das Krümmungsmass dieser Fläche ist $-\frac{1}{c^2}$.

Bezeichnen wir mit x, y, z die Coordinaten einer Fläche, für welche die in Rede stehende Rotationsfläche eine Evolute ist, so finden sich x, y, z leicht mit Hülfe eines von Herrn Weingarten in Journal für Mathematik. Bd. **62**, S. 62 aufgestellten Formelsystems in der Form:

$$x = e^{\frac{\rho_1}{c}} \frac{c - \rho_1}{c} \cos q, \qquad y = e^{\frac{\rho_1}{c}} \frac{c - \rho_1}{c} \sin q,$$

$$z = \frac{c - \rho_1}{c} \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}} - \rho_1 + c \log \left(c - \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}} \right).$$

Diese Rotationsfläche, bei der nun

$$\rho_1 - \rho_2 = c$$

wird, ist unter den von Herrn Lipschitz (Acta Mathematica, Bd. **10**, S. 136, (16)) angegebenen Rotationsflächen mit der genannten Eigenschaft enthalten, was sich mit Hülfe der Substitution:

$$\varphi = q, \qquad \sin \vartheta = \frac{1}{c} e^{\frac{\rho_1}{c}}, \qquad \log \frac{1}{c} + \mathfrak{A} = - 1$$

sofort ergiebt.

Münster i/W. den 1 September 1887.

SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE DES DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES

PAR

J. PTASZYCKI
à S:t PÉTERSBOURG.

1. Le travail actuel a pour objet la solution du problème suivant:

Exprimer l'intégrale $\int y dx$, y étant liée à x par une équation algébrique, au moyen d'une fonction algébrique de x ou s'assurer que cette intégrale n'est pas algébrique.

Le premier pas vers la résolution de ce problème a fait ABEL, en démontrant que, si l'intégrale $\int y dx$ est une fonction algébrique de x, elle s'exprime rationellement au moyen de x et de y.

En s'appuyant sur cette proposition, LIOUVILLE a résolu complètement le problème (Journal de l'Ecole Polytechnique, 22e cahier; Journal de Mathématiques, t. 3).

Depuis, plusieurs autres géomètres ont étudié la question. Je citerai BRIOT et BOUQUET (*Théorie des fonctions elliptiques*), MM. ZEUTHEN (Comptes rendus, 1880), RAFFY (Annales de l'École normale, 1883; 1885) et HUMBERT (Acta mathematica, 1887).

Toutes les solutions du problème, proposées jusqu'à présent, ramènent la question à la recherche de quelques polynômes entiers par la méthode des coefficients indéterminés.

Ici je vais établir un théorème qui permet de résoudre la question

par une voie différente.[1] Ce théorème fournit aussi un nouveau moyen de suivre la méthode des coefficients indéterminés.

2. Théorème. *Soit P un polynôme entier en x; z une fonction de x, définie par l'équation irréductible à coefficients entiers*

$$z^n + \varphi_1(x) z^{n-1} + \varphi_2(x) z^{n-2} + \ldots = 0.$$

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les n déterminations de la fonction z; Δ le discriminant de l'équation en z. Soit enfin

$$\Delta = D^2 E,$$

où D est un polynôme entier, E un polynome entier qui n'a pas de facteurs linéaires multiples.

Si l'intégrale $\int \frac{z}{P} dx$ est algébrique, on peut poser

$$\int \frac{z}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

$Y, X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ étant des polynômes entiers en x, définis de la manière suivante:

1° Y est le produit du polynôme D par le plus grand commun diviseur du polynôme P et de sa dérivée $\frac{dP}{dx}$;

2° $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ satisfont aux équations:

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \ldots z_1^{i-1} & \int \frac{z_1}{P} dx & z_1^{i+1} \ldots z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 \ldots z_2^{i-1} & \int \frac{z_2}{P} dx & z_2^{i+1} \ldots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 \ldots z_n^{i-1} & \int \frac{z_n}{P} dx & z_n^{i+1} \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (i=0,1,2,\ldots,n-1)$$

[1] En 1881, j'ai traité la question de cette manière, pour une classe assez étendue de fonctions algébriques, dans mon Mémoire intitulé *Sur l'intégration sous forme finie* (S:t Pétersbourg). Dans le cas où la fonction y est égale à la racine d'une fonction rationnelle, cette méthode se réduit au procédé de M. Tchébycheff. Je dois à l'obligeante communication de l'illustre géomètre la connaissance de son procédé. Maintenant au sujet dudit procédé on peut consulter *Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris* par M. Hermite (2ème ed.; p. 20).

3. Démonstration. Soit $\int \frac{z}{P}\,dx$ l'intégrale algébrique. L'intégrale sera de la forme (n° 1)

$$(1) \qquad \int \frac{z}{P}\,dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z + \frac{X_2}{Y_2} z^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z^{n-1},$$

X_0, Y_0 ; X_1, Y_1 ; ... désignant des polynômes entiers en x; on peut supposer que la fraction $\frac{X_i}{Y_i}$ soit irréductible.

On tire de l'égalité (1) les n équations

$$\int \frac{z_1}{P}\,dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_1 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_1^{n-1},$$

$$\int \frac{z_2}{P}\,dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_2^{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{z_n}{P}\,dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_n + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_n^{n-1}.$$

Remarquons que ces équations montrent que l'intégrale

$$(2) \qquad \int \frac{z_k}{P}\,dx, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sera représentée, dans le voisinage de chaque point a, par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - a$; au commencement de la série il n'y a qu'un nombre limité de termes à exposants négatifs.

En résolvant nos équations par rapport aux coefficients $\frac{X_0}{Y_0}$, $\frac{X_1}{Y_1}$, ..., on obtient la formule

$$(3) \qquad \frac{X_i}{Y_i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{i-1} & \int \frac{z_1}{P}\,dx & z_1^{i+1} & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{i-1} & \int \frac{z_2}{P}\,dx & z_2^{i+1} & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{i-1} & \int \frac{z_n}{P}\,dx & z_n^{i+1} & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Nous allons maintenant mettre cette formule sous une autre forme.

Dans ce but, je remarque que les éléments du déterminant qui figure dans la formule (3), excepté ceux de la i-ième colonne, restent finis pour toutes les valeurs finies de x. Quant à l'élément (2) de la i-ième colonne, on sait que les seules valeurs finies de x qui puissent le rendre infini sont les racines du polynôme P. Soit

$$P = (x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_l)^{\alpha_l}.$$

On voit sans peine que pour $x = a$ l'intégrale (2) sera finie ou infiniment grande d'un ordre égal au plus à celui de $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$.

Le déterminant considéré se réduit donc à

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}},$$

$f(x)$ étant une fonction qui reste finie pour toutes les valeurs finies de x. Rappelons que le radical $\sqrt{\Delta}$ qui figure dans la formule (3) est égal à $D\sqrt{E}$, où E désigne un polynôme qui n'a pas de facteurs linéaires multiples.

D'après cela, de la formule (3) on déduit que

$$\frac{X_i}{Y_i} = \frac{f(x)}{D.(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}.\sqrt{E}}.$$

On en conclut, en ayant égard aux propriétés des fonctions X_i, Y_i, $f(x)$, E, que le polynôme Y_i doit diviser le polynôme

$$Y = D.(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}.$$

Par conséquent, dans l'égalité (1) on peut poser

$$Y_i = Y; \qquad (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Portant la valeur de Y_i dans la formule (3), on obtient l'expression du polynôme X_i qui établit la seconde partie du théorème énoncé.

4. **Application.** En vertu de notre théorème, on peut procéder de de la manière suivante pour résoudre le problème proposé (n° 1).

On met la fonction à intégrer y sous la forme $\frac{z}{P}$ et le discriminant de l'équation en z sous la forme $\Delta = D^2E$.

On forme le produit du polynôme D par le plus grand commun diviseur du polynôme P et de sa dérivée $\frac{dP}{dx}$; on déterminera ainsi le polynôme Y.

Puis, on développe suivant les puissances décroissantes de x les n expressions

$$\frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \ldots z_1^{i-1} & \int \frac{z_1}{P}dx & z_1^{i+1} \ldots z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 \ldots z_2^{i-1} & \int \frac{z_2}{P}dx & z_2^{i+1} \ldots z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 \ldots z_n^{i-1} & \int \frac{z_n}{P}dx & z_n^{i+1} \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

dans lesquelles $z_1, z_2, \ldots, z_n$ désignent les n déterminations de z; les parties entières dans les développements fourniront respectivement les polynômes $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$.

Les coefficients de ces polynômes contiendront, en général, n constantes inconnues $c_1, c_2, \ldots, c_n$; c_k représente la constante arbitraire de l'intégrale $\int \frac{z_k}{P}dx$.

L'une de ces constantes peut être choisie arbitrairement; on déterminera les autres par la condition que l'égalité

$$\frac{d}{dx}\left| \int \frac{z}{P}dx - \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y} \right| = 0$$

doit avoir lieu identiquement.

Les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant déterminées, la fonction

$$\frac{X_0 + X_1 z + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y}$$

présentera la valeur de l'intégrale $\int \frac{z}{P}dx$. Si ces constantes ne satisfont

pas à la condition indiquée, on conclura que notre intégrale n'est pas algébrique.

Remarque. Il peut arriver que l'impossibilité de l'intégration algébrique se manifeste avant que nos opérations soient menées à bout. L'intégrale $\int \frac{z}{p} dx$ n'est pas algébrique: 1° si le développement de la fonction $\frac{z_i}{p}$ contient un terme en x^{-1} (n° 3); 2° si, dans le développement de l'expression qui fournit le polynôme X_i, les puissances fractionnaires et positives de x ne s'évanouissent pour aucune valeur de $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

5. La seconde partie de notre théorème indique encore le moyen suivant de déterminer les polynômes $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$.

A l'aide de l'expression de X_i, on calcule les limites supérieures des degrés de ces polynômes et l'on cherche ensuite à déterminer leurs coefficients de manière à vérifier l'égalité du n° 4.

Remarque. Si l'on suit cette seconde marche, on n'aura à effectuer que les seules opérations arithmétiques pour résoudre le problème proposé (n° 1).

Prix Oscar II.

Mémoires présentés au concours.

Le concours pour le prix fondé par S. M. le roi Oscar II a été clos le 1r juin de cette année. Nous mentionnons ci-après et dans l'ordre où ils sont parvenus, les mémoires destinés au concours qui ont été adressés au Rédacteur en chef de ce journal, à Stockholm:

1. *Mémoire sur l'équation trinôme de degré impair* $x^m \pm x = r$.

Épigraphe: Les trois nombres harmoniques élémentaires sont 2, 3 et 5.

2. *Nuova Teoria dei Massimi e Minimi degli Integrali definiti.*

Épigraphe: Opinionum commenta delet dies; naturæ judicia confirmat.

(Cic. Nat. D.)

3. *Allgemeine Entwicklung der Functionen.*

Épigraphe: Sich selbst zu loben ist ein Fehler,
Doch jeder thut's, der etwas Gutes thut.
(Westöstlicher Divan von Göthe.)

L'auteur y a joint une traduction française:

Développement général des fonctions

avec l'épigraphe: Tu ne fais pas bien en te louant toi-même
Mais tu te loues toi-même en faisant bien.
(D'après Goethe.)

4. *Les Fonctions Pseudo- et Hyper-Bernoulliennes et leurs premières applications.* — Contribution élémentaire à l'intégration des équations différentielles.

Épigraphe: Venient qui sine offensa, sine gratia, judicent.
(Senèque.)

5. *Über die Bewegungen in einem System von Massepunkten mit Kräften der Form* $-\frac{1}{r^2}$.

Épigraphe: Ἁπλοῦς ὁ λόγος τῆς ἀληθείας ἔφυ.
(Euripides.)

6. *Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'un nombre quelconque de fonctions de plusieurs variables indépendantes.*

Épigraphe: Accipe jussis
carmina cepta tuis.

7. *Über die Integration der Differentialgleichungen, welche die Bewegungen eines Systems von Puncten bestimmen.*

Épigraphe: Nur schrittweise gelangt man zum Ziel.

Avec une traduction française, intitulée:

Sur l'intégration des équations différentielles qui déterminent les mouvements d'un système de points matériels,

et portant l'épigraphe: Pour parvenir au sommet, il faut marcher pas à pas.

8. *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.*

Épigraphe: Nous devons l'unique science
Que l'homme puisse conquérir
Aux chercheurs dont la patience
En a laissé les fruits mûrir.
(Sully-Prudhomme, Le Bonheur.)

Avec un Supplément.

9. *Sur le Problème des trois Corps et les Équations de la Dynamique.*

Épigraphe: Nunquam præscriptos transibunt sidera fines.

10. *Sur le Problème des trois Corps.*

Épigraphe: — — — — — — Coelumque tueri
Jussit et erectos ad sidera tollere vultus.
(Ovide.)

11. *Über die Bewegung der Himmelskörper im widerstehenden Mittel.*

Épigraphe: Per aspera ad astra.

12. *Recherches sur la formule sommatoire d'Euler.*

Épigraphe: Utinam ne nimis erraverim.

Juin 1888.

MITTAG-LEFFLER.

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 11. — 1887–1888. — TOME 11.

CORRECTION.

Tome **10**, page 381, ligne 2, au lieu de 1816 lire 1815.

Nous avons le douloureux devoir d'annoncer à nos lecteurs la mort de notre collaborateur

H.-TH. DAUG,

décédé à Upsala, le 23 mars dernier.

Daug était né le 24 avril 1828 à Gothembourg; en 1856 il devint docent pour les mathématiques à l'Université d'Upsala, docteur en philosophie en 1857, professeur extraordinaire en 1863, et professeur ordinaire en 1867. De 1858 à 1867 il avait presque sans interruption remplacé MALMSTEN. Il a été élu membre de la Société des Sciences d'Upsala en 1862, de l'Académie des Sciences de Stockholm en 1875, de la Société des Sciences et Lettres de Gothembourg en 1878.

Les travaux mathématiques de **Daug** se rapportent principalement aux applications de l'analyse à la géométrie. Ses nombreux élèves qui appartiennent à toute la Suède lui portaient la plus sincère affection et conserveront avec reconnaissance le souvenir de son enseignement.

MITTAG-LEFFLER.